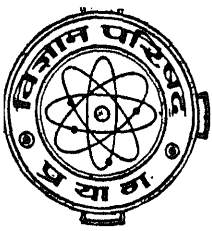


ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका

Vol. 32 July 1989 No. 3

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजो उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्लो के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्‌ · इलाहाबाद

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32. No. 3, 1989

आक्सोवेनेडियम (IV), आयरन (II), कोबाल्ट (II), निकेल (II) एवं कॉपर (II) के सिनकोनीडीन के साथ उपसहसंयोजकता संकुलों का संश्लेषण व अभिलक्षणन

ममता डुडेजा, जयपाल सिंह, नरेश कुमार सांगवान एवं कुलदीप सिंह ढीडसा
रसायन एवं जीव रसायन विज्ञान विभाग,
हरियाणा कृषि विश्वविद्यालय, हिसार

[प्राप्त—अप्रैल 8, 1989]

सारांश

जैविक आधार से महत्वपूर्ण धातु तत्वों, जैसे आक्सोवेनेडियम (IV), आयरन (II), कोबाल्ट (II,) निकेल (II) एवं कॉपर (II) की मलेरिया निवारक औषधि सिनकोनीडीन के साथ उपसहसंयोजकता संकुल बनाकर तात्विक विश्लेषण, आणविक द्रव्यमान और चालकत्व ज्ञात करके, चुम्बकीय प्रवृत्ति के मापन एवं अवरक्त स्पेक्ट्रम के अध्ययन द्वारा इनका अभिलक्षणन किया गया है और इस अभिलक्षण के आधार पर संकुलों की चतुष्कोणीयतः विकृत अष्टफलकीय ज्यामिति निर्दिष्ट की गई है ।

Abstract

Synthesis and characterization of the complexes of oxovanadium (IV), iron (II), cobalt (II), nickel (II) and copper (II) with cinchonidine. *By* Mamta Dudeja, Jaipal Singh, Naresh K. Sangwan and Kuldip Singh Dhindsa, Department of Chemistry and Biochemistry, Haryana Agricultural University, Hissar.

Coordination complexes of biologically important transition metal ions, oxovanadium (IV), iron (II), cobalt (II), nickel (II) and copper (II) with antimalarial drug cinchonidine have been prepared and characterized on the basis of elemental analysis, molecular weights, conductance measurements, magnetic susceptibility and IR sepectra. The complexes have been assigned tetragonally distorted octahedral geometry.

मलेरिया एक परजीवी रोग है । प्रति वर्ष लाखों लोग विशेषतः उष्णकटिबन्धीय एवं उपोष्ण क्षेत्रों के लोग इस बीमारी के शिकार होते आये हैं । सैकड़ों वर्षों से मलेरिया सामाजिक, आर्थिक एवं

राजनीतिक जीवन पर कुप्रभाव पड़ा है। पहले इस रोग का कोई इलाज नहीं था। सर्वप्रथम इसका इलाज यूरोप में तीन सौ वर्ष पूर्व सिनकोना नाम के पौधे से क्यूनीन निकाल कर किया गया। यह दवा बहुत प्रभावकारी सिद्ध हुई। इसके बाद अन्य कई मलेरिया-निबारण औषधियों की खोज हुई जिनमें सिनकोनीडीन, क्लोरोक्वीन, प्रीमाक्वीन इत्यादि प्रमुख हैं।

पूर्वाध्ययनों से यह तथ्य प्रकाश में आया है कि प्रायः मानक ओषधियों का धातु के साथ सम्मिश्र औषधि की सक्रियता को बढ़ा देता है और इसके प्रतिकूल प्रभावों को समाप्त कर देता है[3,7,9] अतः एक मलेरिया निवारक औषधि की जैविक आधार से महत्वपूर्ण धातु आयनों से अन्योन्य क्रिया एवं समन्वयी व्यवहार की सूचना एक यथायोग्य चिकित्सीय औषधि के परिवर्धन में सहायक सिद्ध होगी। इन्हीं तथ्यों को ध्यान में रखते हुये प्रस्तुत शोधपत्र में हमने मलेरिया निवारक औषधि सिनकोनीडीन के आक्सोवेनेडियम (IV), आयरन (II), कोबाल्ट (II), निकेल (II) एवं कॉपर (II) के साथ उपहस-संयोजकता संकुलों के संश्लेषण, अभिलक्षण एवं संरचना अध्ययन का निरूपण किया है।

प्रयोगात्मक

पदार्थ एवं विधियाँ

सिनकोनीडीन सिगमा कैमिकल कम्पनी से मंगवाया गया। अन्य सभी रासायनिक पदार्थ एवं विलायक वैश्लेषिक अभिकर्मक श्रेणी के थे। चुम्बकीय प्रवृत्ति का अध्ययन गॉय की विधि द्वारा (मरकरी टेट्रा-थायोसाइनेटो कोबाल्टेट (II) को कैलीब्रैन्ट के रूप में प्रयोग करके), आणविक द्रव्यमान हिमांकमापी विधि द्वारा एवं अवरक्त स्पेक्ट्रा हिटैची 270-50 अवरक्त स्पेक्ट्रोमीटर द्वारा किये गये। तात्विक विश्लेषण पर्किन-एल्मर 240C CHN अनालाइजर एवं वैरियन टेचट्रान माडेल AA120 परमाण्वीय अवशोषण स्पेक्ट्रोफोलेमीटर की सहायता से किया गया। वैनेडियम का अवशोषण गुरुत्वमापी से किया गया[4]। सभी संकुलों का चालकत्व डाइमेथिलसल्फोक्साइड में नैना डिजिटल कंडक्टिविटीमीटर माडल NDC 732 की सहायता से ज्ञात किया गया।

संकुलों का विरचन

(क) सल्फेटोमोनोऐक्वो ($8a$, 9R) **सिनकोनेन-9-ओल-आक्सोवेनेडियम (IV)**

1.76 ग्राम (5 मि० मोल) सिनकोनीडीन का 100 मि० ली० ऐल्कोहल में घोल बनाकर इसमें वेनेडिल सल्फेट (1.44 ग्राम, 6 मि० मोल) का जल में संतृप्त घोल शनैः शनैः निरन्तर विलोडन के साथ मिलाया गया तथा इसे 5 घन्टे तक जल-ऊष्मक पर पश्चवाही संघनन द्वारा गर्म किया गया। प्राप्त हुये अवक्षेप का निस्यंदन करके जल, ऐल्कोहल एवं डाइएथिल ईथर से धोया गया और अनार्द्र कैल्सियम क्लोराइड पर सुखाया गया। (प्राप्ति = 60%)।

(ख) सल्फेटोडाइऐक्वो ($8a$, 9R) **सिनकोनेन-9-ओल-आयरन (II)**

2.06 ग्राम (7 मि० मोल) सिनकोनीडीन का मेथिल ऐल्कोहल में घोल बनाया गया। 1.94 ग्राम (5 मि० मोल) फेरस सल्फेट का जल में संतृप्त घोल बनाकर इसमें सल्फ्यूरिक अम्ल की 2 बूंदें

मिलाईं गईं। तत्पश्चात् दोनों विलयनों को गोल पेंदे वाले फ्लासक में मिलाकर 4 घन्टे तक पश्चवाही संघनन द्वारा गर्म किया गया। अवक्षेपित ठोस पदार्थ का निस्यन्दन करके, जल, ऐल्कोहल एवं एथिल ईथर से धो करके अनार्द्र कैल्सियम क्लोराइड पर सुखाया गया। (प्राप्ति=60%)।

(ग) डाइक्लोरोमोनोऐक्वो (8α, 9R) सिनकोनेन-9-ओल-कोबाल्ट (II)

1.76 ग्राम (6 मि० मोल) सिनकोनीडीन को ऐल्कोहल में घोल कर इसमें कोबाल्ट क्लोराइड (1.46 ग्राम, 6 मि० मोल) का ऐल्कोहली घोल शनैः शनैः निरन्तर विलोडन के साथ मिलाया गया। तत्पश्चात् इसे पश्चवाही संघनन द्वारा 4 घन्टे तक गर्म किया गया। प्राप्त हरे रंग के अवक्षेप को निस्यन्दित करके ऐल्कोहल तथा डाइएथिल ईथर से धोया गया और अनार्द्र कैल्सियम क्लोराइड पर सुखाया गया। (प्राप्ति=65%)।

(घ) डाइक्लोरोमोनोऐक्वो (8α, 9R) सिनकोनेन-9-ओल-निकेल (II)

2.35 ग्राम (8 मि० मोल) सिनकोनोडीन एवं 1.90 ग्राम (8 मि० मोल) निकेल क्लोराइड लेकर उपर्युक्त विधि (ग) का अनुसरण किया गया लेकिन पश्चवाही संघनन द्वारा मिश्रण को 12 घन्टे तक गर्म किया गया। (प्राप्ति=58%)।

(ङ) डाइक्लोरोमोनोऐक्वो (8α, 9R) सिनकोनेन-9-ओल-कॉपर (II)

1.45 ग्राम (6 मि० मोल) कॉपर क्लोराइड का 100 मि०ली० में घोल बनाया गया और सिनकोनीडीन 1.76 ग्राम (6 मि० मोल) का 50 मि० ली० में घोल तैयार किया गया। शनैः शनैः विलोडन द्वारा कॉपर क्लोराइड का घोल सिनकोनीडीन के घोल में मिलाया गया और इसे 15 मिनट तक जल-ऊष्मक पर गर्म किया गया। मलिन हरे रंग के अवक्षेप को फिल्टर करके ऐल्कोहल एवं डाइएथिल ईथर द्वारा धोया गया और अनार्द्र कैल्सियम क्लोराइड पर सुखाया गया। (प्राप्ति=70%)।

परिणाम तथा विवेचना

आयरन (II) एवं कोबाल्ट (II) के संकुल जल में विलेय तथा शेष सभी संकुल जल में अविलेय हैं। सभी संकुल डाइमेथिल सल्फोक्साइड में पूर्णतया विलेय है। तात्विक विश्लेषण से ज्ञात होता हैं कि संकुलों का निर्माण 1.1 धातु : संलग्नी पदार्थों के संयोजन से हुआ है। संकुलों की अणुक चालकता इनके अनायनिकस्वभाव को दर्शाती है। सभी संकुल अनुचुम्बकीय हैं।

चुम्बकीय आघूर्ण

संश्लेषित आक्सोवेनेडियम-सिनकोनीडीन संकुल का चुम्बकीय आघूर्ण 1.81 बी० एम० है जो तीसरे कक्ष में एक अयुग्मित इलेक्ट्रान की उपस्थिति का प्रतीक है। धातु आयन d^2sp^3 संकरण को दर्शाता है जिसके फलस्वरूप संकुल की ज्यामिति निम्न-प्रचक्रण अष्टफलकीय है।

सारणी 1

तात्विक विश्लेषण एवं अन्य आंकड़े

यौगिक संख्या	आणविक सूत्र	रंग	प्रतिशत प्राप्त (परिकलित) कार्बन	हाइड्रोजन	नाइट्रोजन	क्लोरीन सल्फर	आघूर्ण धातु	चुम्बकीय बी० एम०
1.	$[VO(Cinch^*)H_2O.SO_4]$	चमकीला हरा	47.15	5.07	5.82	6.70	10.67	1.81
	$(C_{19}H_{24}N_2O_7SV)$		(47.25)	(5.04)	(5.88)	(6.73)	(10.72)	
2.	$[Fe(Cinch)(H_2O)_2.SO_4$	हल्का भूरा	46.10	5.35	5.75	6.23	10.76	5.35
	$(C_{19}H_{30}FeN_2O_7S)$		(45.20)	(5.39)	(5.80)	(6.63)	(10.10)	
3.	$[Co(Cinch)H_2O.Cl_2]$	नीला	51.32	5.38	6.29	16.05	13.21	5.02
	$(C_{19}H_{24}Cl_2CoN_2O_2)$		(51.46)	(5.41)	(6.32)	(16.02)	(13.31)	
4.	$[Ni(Cinch)H_2O.Cl_2]$	हल्का हरा	51.42	5.29	6.35	16.02	13.24	3.28
	$(C_{19}H_{24}Cl_2N_2NiO_2)$		(51.50)	(5.42)	(6.33)	(16.06)	(13.28)	
5.	$[Cu(Cinch)H_2O.Cl_2]$	मलिन हरा	51.03	5.31	6.21	15.81	14.12	1.19
	$(C_{19}H_{24}Cl_2CuN_2O_2)$		(51.00)	(6.37)	(6.26)	(15.87)	(14.20)	

*Cinch=सिनकोनीडीन

सारणी 2

सिनकोनीडीन एवं संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रा की मुख्य आवृत्तियों एवं उनका निर्धारण

यौगिक संख्या	ν(O—H) संकुलित जल	ν(O—H) सैकेन्डरी ऐल्कोहल	ν(C=N) एवं δ(O—H)	ν(C—N) क्यूनूक्लीडीन रिंग	ν(V=O)	ν(M—N)	ν(M—O)	ν(M—Cl)
सिनकोड़ीन-		3070(s)	1630(m)	1162(s)				
1.	3444 (s)	3190 (s)	1634 (m)	1160 (m)	976 (s)	650 (m)	610 (m)	—
2.	3522 (s)	3192 (s)	1650 (m)	1170 (s)	—	605 (m)	550 (m)	—
3.	3400 (s)	3180 (s)	1640 (s)	1170 (s)	—	670 (m)	650 (m)	470 (m)
4.	3370 (s)	3182 (s)	1650 (m)	1160 (m)	—	670 (m)	620 (m)	470 (m)
5.	3380 (s)	3190 (s)	1645 (m)	1170 (m)	—	680 (m)	670 (m)	472 (m)

आयरन-सिनकोनीडीन संकुल का चुम्बकीय आघूर्ण 5.35 बी० एम० है जो चार अयुग्मित इलेक्ट्रान की उपस्थिति का द्योतक है। इस आधार पर संकुल की ज्यामिति उच्च-प्रचक्रण अष्टफल-कीय है।

प्रायः कोबाल्ट (II) की समन्वय संख्या चार और छः है लेकिन समन्वय संख्या छः अतिस्थायी एवं सर्वनिष्ट है[1]। अष्टफलकीय समन्वय संख्या छः के संकुल निम्न-प्रचक्रण विन्यास अथवा उच्च-प्रचक्रण विन्यास के हो सकते हैं। कोबल्ट (II) के निम्न प्रचक्रण अष्टफलकीय विन्यास में एक ही अयुग्मित इलेक्ट्रान होगा तथा उच्च प्रचक्रण अष्टफलकीय विन्यास में तीन अयुग्मित इलेक्ट्रान होंगे। कोबाल्ट-सिनकोनीडीन संकुल का चुम्बकीय आघूर्ण 5.02 बी०एम० है (तीन अयुग्मित इलेक्ट्रान) जो कि उच्चप्रचक्रण अष्टफलकीय विन्यास से सुसंगत है।

संश्लेषित निकेल-सिनकोनीडीन संकुल का चुम्बकीय आघूर्ण 3.28 बी० एम० है जो कि दो अयुग्मित इलेक्ट्रान की उपस्थिति एवं उच्च-प्रचक्रण अष्टफलकीय विन्यास को दर्शाता है। इस संकुल में निम्न-प्रचक्रण विन्यास पूर्णतया असम्भव है क्योंकि इसके लिये संकुल का प्रतिचुम्बकीय होना आवश्यक है।

भिन्न-भिन्न कोटि के कक्षक आघूर्ण के कारण कॉपर-सिनकोनीडीन संकुल 1.89 बी० एम० चुम्बकीय आघूर्ण (एक अयुग्मित इलेक्ट्रान) दर्शाता है क्योंकि जॉन-टेलर प्रभाव कठोर समभ्रंश निम्नतम अवस्था को रोकता है[4] लेकिन उपर्युक्त सभी संकुल अष्टफलकीय हैं। किसी भी संकुल में सभी छः संलग्नक एक-जैसे नहीं हैं। चूंकि जल, हैलोजन व सल्फेट सिनकोनीडीन की अपेक्षा कमजोर संलग्नक हैं इसलिये सभी संकुलों में अष्टफलकीय की अपेक्षा चतुष्कोणीय विकृत अष्टफलकीय ज्यामिति की प्रत्याशा है।

अवरक्त स्पेक्ट्रम

संलग्नी पदार्थं के उपसहसंयोजी परमाणुओं का निर्धारण सिनकोनीडीन एवं उपसहसंयोजी संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रा का ध्यानपूर्वक तुलनात्मक अध्ययन करके किया गया है। धातु से संकुलन होने पर सिनकोनीडीन में O—H तनन की आवृत्ति पहले की अपेक्षा ऊपर के क्षेत्र में प्रतिस्थापित हो जाती है। सभी संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रम 3500 सें० मी० एवं 1630 सें० मी०$^{-1}$ के समीप बैंड दर्शाते हैं जो कि जल की O—H तनन व बंकन आवृत्ति के द्योतक हैं [5], ν(C=N) एवं ν(C=C) की आवृत्तियों में अन्तर आने का प्रमुख कारण क्यूनोलीन रिंग नाइट्रोजन का संकुलन में सम्मिलित होना है। सैकेन्डरी ऐल्कोहल के हाइड्रोक्सी गुण एवं क्यून्यूक्लोडीन रिंग के नाइट्रोजन के संकुल में सम्मिलित होने के कारण संकुलों में O—N बंकन आवृत्ति व C—N (क्यून्यूक्लीडीन रिंग) तनन आवृत्ति निचले क्षेत्र में प्रतिस्थापित होती है। संकुलों में 400 सें० मी०$^{-1}$ से 600 सें० मी०$^{-1}$ के बीच में जो नये बैंड दिखाये देते हैं वे M—N, M—O एवं M—Cl तनन आवृत्तियों के सूचक हैं।

निर्देश

1. काटन, एफ० ए० तथा विल्किसन, जी०, "Advanced Inorganic Chemistry", Interscience New York, 1980.

2. कोडामा, के०, "Methods of Quantitative Inorganic Analysis", Johnwilley, New York, 1963, पृष्ठ 294

3. गोसाल्वज, एम०, ब्लैंको, एम० एफ०, विवेर्को, सी० तथा वैलीस, एफ०, Europ. J. Cancer, 1978, **14**, 1185.

4. नायडू, आर० शेषाद्रि तथा नायडू, आर० आर०, J. Inorg. Nucl. Chem., 1979, **41(11)**, 1625.

5. नाकामोटो, के०, "Infrared and Raman Spectra of Inorganic and Coordination Compounds", Willey Interscience, New York, 1978.

6. बेलामी, एल० जे०, "The Infrared Spectra of Complex Molecules". Champman and Hall, New York, 1975.

7. रैन्सफोर्ड, के० डी० तथा व्हाइटहाउस, एम० डब्लू०, J. Pharm. Phamacol, 1976, **28**, 83.

8. वोगेल, ए० आई०, "A Textbook of Quantitative Inorganic Analysis," Longmans, London, 1978.

9. सारेंसन, जे० आर० जे०, J. Med. Chem., 1976, **19**, 135.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32, No. 3, 1989

बोलाफार्म विद्युत-अपघट्य α, α'-बिस (4, 4'-बाईपिरिडीनियम) -p-जायलीन डाइब्रोमाइड का जल में विलयन-अध्ययन

भीमबली प्रसाद
रसायन विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—अप्रैल 8, 1989]

सारांश

"बोलाफार्म" प्रकार के ऐरोमैटिक विद्युत-अपघट्य α, α'-बिस (4, 4'-डाइपिरिडीनियम)-p-जायलीन डाइब्रोमाइड लवण का जल में, 25°-30° के ताप अन्तराल में, घनत्व और श्यानता का विस्तृत अध्ययन किया गया तथा इससे प्राप्त आभासी मोलक आयतन, समानीत श्यानता और इनके सान्द्रण, ताप सम्बन्धों के आधार पर जलविरागी एवं वैद्युत-निरूपण प्रत्याकर्षणों पर विचार किया गया। यह लवण जल में एक अच्छा विलायक संगठक प्रतीत होता है जो एक प्रकार का जलावृत्त "स्वतंत्र-प्रवाहक प्रतिरूप" रखने में सक्षम है।

Abstract

Solution studies of bolaform electrolyte α, α'-bis (4, 4'-bipyridinium)-p-xylene dibromide in water. *By* Bhim Bali Prasad, Chemistry Department, Banaras Hindu University, Varanasi.

Studies on density and viscosity measurement of a "bolaform" type of aromatic electrolyte, α, α'-bis (4, 4'-bipyridinium) dibromide salt have been undertaken in water. The apparent molal volumes, reduced viscosities results and their concenteration and temperature dependence behaviours have been examined in terms of hydrophobic and electrostrictional interactions over a small temperature range (25±5.0°). The system was considered to be a structure promoter leading to have a water-caged "free-draining model."

जैव-अभिरुचि के "बोलाफार्म" विद्युतअपघट्यों से सम्बन्धित बिस-टेट्राऐल्किल अमोनियम लवणों $R_3\overset{+}{\underset{X}{N}}(CH_2)_2\overset{+}{\underset{X}{N}}R_3$ (R=ऐल्किल ग्रुप; X=एकसंयोजी ऋणायन) का अध्ययन विगत वर्षों में

किया जा चुका है। उदाहरणार्थ α, α'-बिस (ट्राइ मेथिलअमोनियम) पालिमिथिलीन लवणों के चतुष्क धनावेशों के बीच की दूरी और विलायकीयन लक्षणों का इनके द्वारा होने वाली फार्मोकोलाजिकल क्रियाओं पर प्रभाव का अध्ययन प्रकाशित हुआ है[1]। इन बहुसंयोजी पदार्थों की जैविक-अभिक्रियाओं एवं संरचनात्मक खोजों में विलायकीय अध्ययन का अपना महत्व है। यद्यपि बोलाफार्म अपघट्यों के विलायकीयन व्यवहार तथा जल-संरचना के कारण जैविक अभिक्रियाओं पर होने वाले प्रभाव की विस्तृत जानकारियाँ उपलब्ध हैं[2], ऐरोमैटिक बोलाफार्म लवणों पर तत्सम्बन्धित अध्ययन अभी तक सीमित ही है।

प्रस्तुत शोध-पत्र का उद्देश्य ऐसे बोलाफार्म विद्युत-अपघट्यों का विलायकीयन अध्ययन करना है जिसके दोनों चतुष्क धनावेशित नाइट्रोजन केन्द्र ऐरोमैटिक प्रत्यास्थापकों से सम्बद्ध हों। इस तरह के अध्ययन में, साधारण आयनों के विलायकीयन में प्रयुक्त विभिन्न तथ्यों के अतिरिक्त निम्नलिखित बातों पर भी ध्यान देना आवश्यक है :

(i) अणु में उपस्थित समान आवेशों की समीपता

(ii) प्रति आयनों की चतुष्क आयनों से सम्बद्धता और आवेशित दण्डाकार अणु के ऊपर आयनिक वातावरण

(iii) अणु का आवेश आश्रित विन्यास जो उसके आकार और आन्तरिक आण्विक नम्यता (flexibility) से नियन्त्रित हो।

अतः इस कार्य हेतु एक बोलाफर्म विद्युत-अपघट्य α, α'-बिस (4, 4'-बाइपिरिडीनियम) लवण, [BipyN$-CH_2C_6H_4CH_2-N^+$Bipy, 2Br$^-$] (संक्षिप्त नाम $(Bipy)_2XBr_2$), को लिया गया है जिसका जल में $25\pm5°$ ताप पर घनत्व एवं श्यानता अनुमापन कर विलायकीयन गुणों को जानने का प्रयास किया गया है। ज्ञातव्य हो कि यौगिक $(Bipy)_2XBr_2$ एक महत्वपूर्ण अपोपचय (Redox) पदार्थ है जो एक शाकनाशी तथा जैव प्रवृत्ति[3] वाले "पैराक्वाट" अथवा "वायोलोजेन" परिवार से सम्बन्धित है। आभासी मोलल आयतन आंशिक मोलर आयतन और श्यानता के विभिन्न तापों पर प्राप्त परिणामों को दो तरह के विलेय-विलायक प्रत्याकर्षणों के परिपेक्ष्य में निरूपित किया गया है :

(i) पदार्थ के धनायनों और ऋणायनों के वैद्युत आवेश द्वारा वैद्युत-निरूपण जल योजन अथवा आवेश प्रभाव और

(ii) जलविरागी संरचनात्मक संवृद्धि अथवा वैद्युत-अपघट्य के जलारोधी (अनावेशित) भाग द्वारा "आइसबर्ग" निर्माण अर्थात् जल विरागी प्रभाव।

प्रयोगात्मक

विलायक और रसायन

पायरेक्स काँच के बर्तन में दो बार आसवित विआयनित जल (विशिष्ट चालकता 1×10^{-6} -5×10^{-6} मोज) का प्रयोग सभी विलयनों के बनाने में किया गया।

α, α'-बिस (4, 4'-बाइपिरिडीनियम)-p-जायलीन डाइब्रोमाइड, $(Bipy)_2XBr_2$, को ऐसीटोनाइट्राइल माध्यम में α, α'-डाइब्रोमो-p-जायलीन तथा 4, 4'-बाइपिरिडीन (1:2 अनुपात) के सीधे संघनन से बनाया गया जिसका उल्लेख पूर्ववर्ती प्रकाशन में अभिलक्षणन सहित (अणुभार 576) किया जा चुका है।[4]

घनत्व तथा श्यानता मापन

सभी विलयनों का घनत्व एक द्विकेशिका पिक्नोमीटर (जिसकी भुजाएँ 0.01 मिली० में अंशांकित है) द्वारा नापा गया। पिक्नोमीटर को पहले ज्ञात मात्रा वाले जल के साथ अंशशोधित किया गया और सभी तौल पर उत्पलावकता संशोधन किया गया।

सभी श्यानता अनुमापन के लिये एक अबेलहड्स-केनन्-फेन्सकी प्रकार का श्यानतामापी (विस्कोमीटर), जिसका जल के साथ बहिर्वाह समय 25° पर 192.6 से० था, प्रयुक्त किया गया।

सभी घनत्व और श्यनता अनुमापन एक वातानुकूलित कमरे (~25°) में किये गये। विभिन्न तापों पर अध्ययन हेतु एक यथोचित थर्मोस्टेट (±1°) प्रयुक्त किया गया। विस्कोमीटर से मापित वहिर्वाह समय ±0.1 से० के अन्तर्गत पुनःप्राप्य है और प्रत्येक श्यानता गणना में इसके 3-4 प्रेक्षणों का औसत लिया गया। श्यानता अनुमापन की यथार्थता ±0.1% से भी उत्तम पाई गयी।

परिणाम तथा विवेचना

घनत्व प्रेक्षणों द्वारा 20, 25° और 30° पर आभासी मोलल आयतन (ϕv) अधोलिखित समीकरण की सहायता से प्राप्त किया गया[5,7]

$$\phi v = \frac{M}{d_0} - \frac{1000(d-d_0)}{Cd_0} \quad (1)$$

जहाँ M विलेय का अणुभार, d और d_0 क्रमशः घोल एवं जल का घनत्व, तथा C सान्द्रण मोल/लिटर है। ϕv मानों के आकलन में ~1% की अनिश्चितता है। प्रयुक्त अध्ययन में आंशिक मोलल आतयन ($\bar{v}_2^\circ$) ज्ञात करने के लिये $\phi v - C$ आलेख को $C=0$ तक स्वतन्त्र रूप से वहिर्वेशित किया जाता है।

ϕv का सान्द्रण के साथ ह्रास, जलविरागी प्रभाव का सूचक है जबकि वृद्धि, वैद्युत-निरूपित जलयोजन की पहचान होती है।[6]। एक निश्चित ताप और सान्द्रण पर ϕv का वास्तविक मान इन दोनों प्रभावों का नेट परिणाम होता है।

लवण $(Bipy)_2XBr_2$ के लिये प्राप्त घनत्व आकड़ों (सारणी 1) के विश्लेषण ϕv का सान्द्रण के साथ ह्रास (~0.002 मोल/लीटर के बाहर संस्तर स्थिति) ही इंगित करते हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि यह पदार्थ वैद्युत-निरूपण प्रभाव की स्पर्धा में एक उच्चस्तरीय जल-विरागी प्रभाव अनुभव करता है। यह प्रभाव दोनों चतुष्क नाइट्रोजन केन्द्रों के बीच उपस्थित इलेक्ट्रान-समृद्ध जायलिल अर्धांशों के

सारणी 1

α, α'-बिस (4, 4'-बाई पिरिडीनियम)-p-जायलीन डाइ ब्रोमाइड का जल में घनत्व-अनुमापन का परिणाम

सान्द्रण $C \times 10^3$ मोल/ली०	घनत्व, d (ग्रा०/मिली०)			आभासी मोलल आयतन, ϕv (मिली०/मोल)			आंशिक मोलल आयतन, $\bar{v}_2^{\circ}$ (मिली०/मोल)
	20°	25°	30°	20°	25°	30°	
1.10	0.99808	0.99710	0.99589	690.7	524.3	359.4	
1.55_5	—	0.99723	0.99611	—	436.3	341:4	
2.01	0.99822	0.99725	0.99617_4	567.2	477.0	374.4	
2.73	0.99858	0.99736	—	438.9	460.6	—	835 (20°)
3.30	0.99868	0·96767	0.99655	431.2	388.6	301.9	625 (25°)
4.26	0.99876	0.99768	0.99666	446.2	427.5	339.7	430 (30°)
5.82	0.99907	0.99819_7	0.99723	427.8	379.0	305.5	
7.78	0.99947	0.99864	0.96734	413.4	370.6	339.4	

जल का घनत्व (d_0) : 0.998203 (20°); 0.997044 (25°); 0.995646 (30°)

सारणी 2

a, a'-बिस (4, 4'-बाइपिरिडीनियम-p-जायलीन डाइब्रोमाइड का जल में श्यानता-मापन के परिणाम का सारांश

सान्द्रण, C (ग्रा०/डेली०)	श्यानता, η(C.P.)			समानीत श्यानता, η_{SP}/C (डेली०/ग्रा०)			नैज श्यनता, [η]* (डेली०/ग्रा०)
	20°	23°	30°	20°	25°	30°	
0.0896	1.0079	0.8966_5	—	0.032	0.037	—	
0.1156	1.0083	0.8976	0.8017	0.028_4	0.038	0.010_5	
0.1572	—	0.8989	—	—	0.037_5	—	0.099 (20°)
0.1900	1.0092_4	0.8989	0.8022	0.022	0.030	0.0099	0.081 (25°)
0.2452	1.0101	0.9005_4	0.8025	0.021	0.031	0.0093	0.017 (30°)
0.3352	1.0115	0.9017	0.8029	0.019	0.027	0.0085	
0.4464	1.0133	0.9033	0.8033	0.018_5	0.024	0.0079	

जल की श्यानता (η_0) : 1.0050 (20°); 0.8937 (25°); 0.8007 (30°)

*लीस्ट-स्क्वायर (Least-squares) मान

कारण है जो पिरिडीनियम नाइट्रोजनों के धनात्मक आवेश को इतना कम कर देता है कि वह वैद्युत विरूपण जलयोजन के लिये एक तरह से अक्षम हो जाता है। साथ ही जल के —OH समूहों का ऐरोमैटिक पिरिडीन के π-इलेक्ट्रनों से आकर्षण इस तरह के जलविरागी विलेयों के लिये नगण्य हो जाता है। आंशिक मोलर आयतन की ताप के साथ अस्वाभाविक प्रवृत्ति [$\bar{v}_2^\circ$=835 (20°); 625 (25°); और 430 मिली०/मोलर (30°)] अन्य साधारण विद्युत-अपघट्यों से सर्वथा भिन्न है। इस तरह के अद्‌भुत व्यवहार की व्याख्या पदार्थ के चारों ओर हाइड्रोजन बन्धित संगठित जल के "आवरण" होने की परिकल्पना से की जा सकती है। तथाकथित "आवरण" अथवा "जल पिंजर" की संरचना और साम्यावस्था में आकर, वृहद् बाइपिरिडिनियम आयनों के अवरोधक प्रभाव तक चतुष्क केन्द्रों के कम धनात्मक आवेश के घनत्व पर निर्भर है। ताप के बढ़ने के साथ निम्नलिखित अवस्थाओं में से किसी एक या दो का होना स्वाभाविक है :

(i) पदार्थ के चारों ओर हाइड्रोजन बंधित जल की हिम पट्टियों का पिघलना,

(ii) $(Bipy)_2XBr_2$ के असमतलीय पुटित (Puckered) बाइपिरिडीन वलयों के अन्तर्निहित रिक्त स्थानों में जल पिंजर से प्राप्त जल अणुओं का भर जाना।

$(Bipy)_2XBr_2$ यौगिक के धनावेशों का आंशिक मोलल आयतन 25° पर 561.8 मिली०/ग्रा० आयन ($\bar{v}_2$ Br^-= 31.6 मिली०/ग्रा० आयन [8]) प्राप्त हुआ।

ताप 20°, 25° और 30° पर मापी गई श्यानता का परिणाम सारणी 2 में दिया गया है। सभी श्यानता आंकड़े, हग्गिन्स समीकरण [9], $\eta_{SP}/C=[\eta]+k[\eta]^2C$, के अनुसार व्यवहृत किया गया। प्रयुक्त यौगिक साधारण अपघट्यों से सर्वथा विपरीत गुण (एक पालिइलेक्ट्रोलाइट की तरह) वाला है। इस लवण के लिये जल में समानीत श्यानता η_{PS}/C, सान्द्रण के घटने के साथ बिना किसी सीमा के उत्तरोत्तर बढ़ती ही जाती है। η_{PS}/C-सान्द्रता(C) ग्राफ में वहिर्वेशन की अनिश्चितता से बचने और विभिन्न तापों पर नैज श्यानता (intrinsic viscosity), $[\eta]$ अर्थात् (η_{SP}/C) C=0, ज्ञात करने के लिये फ्वास-स्ट्रास समीकरण का व्युत्क्रम रूप[10], $C/\eta_{SP}=1/A+(B/A)\sqrt{C}$, इस सन्दर्भ में उचित प्रतीत होता है। स्थिरांक A, नैज श्यानता $[\eta]$ है जो यौगिक के आण्विक आकार और मात्रा का अनुमान बतलाता है। ताप के बढ़ने के साथ $[\eta]$ के घटते हुए मान (सारणी 2) अर्थात् ताप के साथ घटते हुये यौगिक आकार, आंशिक मोलर आयतन की व्याख्या में परिकल्पित, हाइड्रोजन, बन्धित जल पिंजर की अस्मिता को सम्पुष्ट करते हैं। चूंकि जल एक बहुत ही अच्छा विलायक है अतः पदार्थ के आण्विक ढाँचे के चारों ओर संगठित जल पट्टियाँ किसी भी अन्तर्आण्विक संकुचन का विरोध करती हैं। इस तरह $(Bipy)_2XBr_2$, एक दृढ़ "स्वतन्त्र-प्रवाहक प्रतिरूप" (free-draining model) बन जाता है जो विलायक अभिगमन में प्रचुर घर्षण प्रदान करता है। ताप के बढ़ने के साथ $[\eta]$ का ह्रास, जल पिंजर के आकार में न्यूनीकरण और पिंजर के अचल जल के सम्पूर्ण घर्षण प्रतिरोध में कमी आ जाने के कारण है। स्थिरांक B, जो धनायन और ऋणायन के बीच स्थिर वैद्युत जल है, C/η_{SP} तथा C के बीच बनाये गये ग्राफ की प्रवणता से प्राप्त किया गया है। इसका मान 20°, 25° और 30° पर क्रमशः 7.39, 34.5 और 1.66 हैं। ताप के बढ़ने के साथ B का घटना, ऊंचे ताप पर ब्रोमाइड आयनों की पलायनवादिता और निम्न ताप पर जल पिंजर

में, ब्रोमाइड आयनों की प्रेरित आयन युग्म बनाने की दिशा में, परिक्षेदन प्रक्रिया का द्योतक है। मध्यम-क्रम के सान्द्रणों पर प्राप्त श्यानता आंकड़ों के आधार पर औसत संक्रियण ऊर्जा 4.02 कि० कैलोरी/मोल प्राप्त हुआ जो लघु चतुष्क अमोनियम लवणों के संक्रियण ऊर्जा के अनुरूप ही है।

निर्देश

1. अधारकर, एस० तथा लिनेवाम, एस०, **ज० फिजि० केमि०**, 1973, **79**, 2068.
2. फ्वास, आर० एम० तथा एडेलसन, डी०, **ज० अमे० केमि० सोसा०**, 1951, **73**, 261-949. मेथसन, जे० सी० तथा कानवे, बी० ई०, **ज० केमि० सोसा० फैराडे ट्रान्स०**, 1974, **70**, 752; **जे० साल्युसन केम०**, 1973, **3**, 455; कोलीन्स, जी० एल० तथा स्मीद, जे०, **ज० अमे० केमि० सोसा०**, 1973, **55**, 1503.
3. बर्ड, सी० एल० तथा कुन, ए० टी०, **केमि० सोसा० रिव्यू०**, 1981, **10**, 49.
4. प्रसाद, बी० बी०, **जे० इल्क्ट्रोकेमि० सोसा० इण्डिया**, 1986, **35**, 215.
5. कोलराच, एफ० तथा हालवाच, डब्लू०, **एना० फिजि० केमि०**, 1893, **50**, 118; 1894, **53**, 14.
6. वेन, डब्लू० वाई० तथा सैटो, एस०, **ज० फिजि० केमि०**, 1964, **68**, 2639.
7. मिलेरो, एफ० जे०, **केमि० रिव्यू०**, 1971, **71**, 147.
8. कानवे, बी० ई०, **ज० मैक्रोमोल० सा०, रिव्यू मेक्रोमोल० केमि०**, 1972, **C6**, 113.
9. हग्निन्स, एम० एल०, **ज० अमे० केमि० सोसा०**, 1942, **64**, 2716.
10. फ्वास, आर० एम० तथा स्ट्रास, यू० पी०, **ज० पालि० सा०**, 1948, **3**, 246.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32. No. 3, 1989

2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण समूह के संपात तथा स्थिर बिन्दु एवं अनुप्रयोग

श्यामलाल सिंह, विजेन्द्र कुमार तथा अशोक गांगुली*

गणित, विभाग

गुरुकुल कांगडी विश्वविद्यालय, हरिद्वार

तथा

गणित विभाग

एस० जी० एस० इन्स्टीट्यूट आफ टेक्नोलाजी व साइन्स, इन्दौर*

सारांश

इस प्रपत्र में मनमाने समुच्चय पर 2-दूरीक समष्टि में मान रखने वाले प्रतिचित्रण समूह के लिये कुछ सम्पाती प्रमेय एवं स्थिर बिन्दु प्रमेय प्रस्तुत किये गये हैं। कुछ अनुप्रयोग भी दिये गये हैं।

Abstract

Coincidence and fixed points of family of mappings on 2-metric spaces and application. *By* S. L. Singh, V. Kumar and A. Ganguly, Department of Mathematics Gurukul Kangri University, Hardwar and Department of Mathematics, S. G. S. Institute of Technology and Science, Indore.

Some coincidence theorems for a family of mappings on an arbitrary set with values in a 2metric space and fixed point theorems have been presented. A few applications are also given.

Throughont this paper X stands for an arbitary set consisting of atleast three points, N the set of natural numbers, (M, d) a metric (1-metric) space, (Y, d) a 2-metric space and $H=\{\phi : [0, \infty) \to [0, \infty) | \ \phi$ is u. s. c. (upper semi continous), non-decreasing and $\phi(t) < t, t > 0\}$. Further, if is S, P are mappings on Y then $C(SP)$ will notate the set of all coincidence points of S and P, i. e. $C(SP)=\{z | \ Sz=Pz\}$.

The following is one of the main results :

Theorem 1

Let X be an arbitrary set, Y a 2-metric space and A_i $(i \in N) : X \to Y$. If there exist mappings $S, T : X \to Y$ such that $A_i(X) \subset S(X) \cap T(X)$, $i \in N$, for all $x, y \in X$, all $a \in Y$, $i, j \in N$, $i \neq j$,

$$d(A_i x, A_j y, a) \leqslant \phi (\max \{d(Sx, Ty, a), d(Sx, A_i x, a), d(Ty, A_j y, a), \tfrac{1}{2}[d(Sx, A_j y, a) + d(Ty, A_i x, a)]\}) \quad (1.1)$$

for some $\phi \in H$ and

$$S(X) \cap T(X) \text{ is a complete subspace of } Y. \quad (1.2)$$

Then for each $i \in N$:

(i) A_i and S have a coincidence,

(ii) A_i and T have a coincidence.

Further, if $X=Y$ and each A_i commutes with S (respectively T) on $C(A_i S)$ (resp. $C(A_i T)$, then

(iii) $A_i (i \in N)$, S and T have a unique common fixed point.

2-दूरीक समष्टियों की अवधारणा का अन्वेषण एस० गैह्लर ने शोध प्रपत्रों में किया था।[2-5] कुछ गणितज्ञों ने 2-दूरीक समष्टि में प्रतिचित्रणों के संपाती एवं स्थिर बिन्दुओं के अस्तित्व का अध्ययन किया है (उदाहरण के लिये देखें[1,8,13-16,21,22,25,26] [28-33] ।

इस प्रपत्र में हम मनमाने समुच्चय पर 2-दूरीक समष्टि के मान रखने वाले प्रतिचित्रण समूह के लिये संपाती प्रमेयों तथा एक प्रतिचित्रण युगल के साथ क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण समूह के लिये स्थिर बिन्दु प्रमेयों की स्थापना कर रहे हैं। एक प्रमुख विशेषता यह है कि प्रतिचित्रणों की क्रमविनिमेयता की आवश्यकता केवल संपाती बिन्दुओं पर है। कुछ अनुप्रयोग भी दिये गये हैं (देखें प्रमेय 5-6)।

इस प्रपत्र में X हमेशा न्यूनतम तीन बिन्दुओं वाले मनमाने समुच्चय के रूप में लिया जायेगा। N का प्रयोग प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय के रूप में, (M, d) का दूरीक (1-दूरीक) समष्टि के रूप में, (Y, d) का 2-दूरीक समष्टि के रूप में एवं $H=\{\phi : [0; \infty) \to [0, \infty)\}$ ϕ उपरि सामिसंतत अह्रासमान है एवं $\phi(t) < t, t > 0\}$। यदि S तथा P समष्टि Y पर प्रतिचित्रण हैं तब $C(SP)$ को S तथा P के समस्त संपाती बिन्दुओं के समुच्चय के रूप में प्रयुक्त किया जायेगा, अर्थात् $C(SP)=\{z\} \{Sz=Pz\}$।

प्रपत्र को संपूर्णता प्रदान के लिये हम 2-दूरीक समष्टि से संबंधित कुछ परिभाषायें सम्मिलित कर रहे हैं।

एक 2-दूरीक समष्टि को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं

मान लें Y कोई मनमाना समुच्चय है। $Y \times Y \times Y$ पर d एक वास्तविक मानीय फलन निम्नलिखित शर्तों को पूरी करता हुआ है

(1) दो विभिन्न बिन्दुओं a तथा b के लिये बिन्दु c इस प्रकार है कि

$$d(a, b, c) \neq 0;$$

(2) तीन बिन्दुओं x, y, z में से यदि कम से कम दो समान हों तो

$$d(x, y, z)=0;$$

(3) $d(x, y, z)=d(x, z, y)=d(y, z, x);$

(4) $d(x, y, z) \leqslant d(x, y, z)+d(x, u, z)+d(u, y, z)$

तब (Y, d) एक 2-दूरीक समष्टि है।

Y में अनुक्रम $\{y_n\}$ को कोशी कहा जाता है यदि Y के प्रत्येक बिन्दु a के लिये

$$\lim d(y_m, y_n, a)=0$$

अनुक्रभ $\{y_n\}$ को y पर अभिसारी और y को इस अनुक्रम की सीमा कहा जाता है यदि Y के प्रत्येक a के लिये

$$\lim d(y_n, y, a)=0.$$

ऐसे 2-दूरीक समष्टि को जिसमें प्रत्येक कोशी अनुक्रम अभिसारी हो पूर्ण 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है।

हमें निम्नलिखित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी—

प्रमेयिका[12]

मान लें $\phi \in H$ और $t_n > 0, n \in N$. यदि $t_{n+1} \leqslant \phi(t_n), n \in N$, तब $\{t_n\}$ अनुक्रम शून्य पर अभिसरित होता है।

सेसा[19] तथा नायडू[14] का अनुसरण करते हुये :

परिभाषा 1

मान लें P और S, Y पर स्व-प्रतिचित्रण हैं। तब P और S को किसी बिन्दु $y \in Y$ पर दुर्बल क्रमविनिमयी कहा जाता है यदि प्रत्येक $a \in Y$ के लिये

$$d(PSy, SPy, a) \leqslant d(Sy, Py, a)$$

यदि P और S 2-दूरीक समष्टि Y के प्रत्येक बिन्दु पर क्रम विनिमयी हैं तब यह कहा जाता है कि P और S 2-दूरीक समष्टि Y पर दुर्बल क्रम विनिमयी हैं। उल्लेख है कि यह आवश्यक नहीं है कि 2-दूरीक समष्टि पर कोई दुर्बल क्रमविनिमेयी प्रतिचित्रण युगल, क्रमविनिमयी हो परन्तु कोई क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल सदैव ही दुर्बल क्रमविनिमयी होगा (देखें [14, उदा० 2], तथा [17] और [20] भी)। तथा यदि P और S किसी संपाती बिन्दु z पर दुर्बल क्रमविनिमयी हैं तब निश्चय ही वे z पर क्रमविनिमयी हैं। वास्वत में, यदि $Sz=Pz$ तथा Y के प्रत्येक a के लिये,

$$d(PSz, SPz, a) \leqslant d(Sz, Pz, a)=0,$$

अर्थात्

$$Sz=Pz.$$

परिणाम निम्नवत् हैं।

प्रमेय 1

मान लें X एक मनमाना समुच्चय, Y एक 2-दूरीक समष्टि और $A_{i(i \in N)}$ हैं। यदि प्रतिचित्रण $S, T: X \rightarrow Y$ इस प्रकार हैं कि

$$A_i(X) \subset S(X) \cap T(X), i \in N$$

तथा समस्त $x, y \in X$ तथा समस्त $a \in Y$, $i, j \in N$, $i \neq j$ के लिये। तब H के किसी ϕ के लिये

$$d(A_ix, A_jy, a) \leqslant \phi(\max\{d(Sx, Ty, a), d(Sx, A_ix, a), d(Ty, A_jy, a), \tfrac{1}{2}[d(Sx, A_jy, a)+d(Ty, A_ix, a)]\}) \quad (1.1)$$

H के किसी ϕ के लिये और

$$S(X) \cup T(X), Y \quad (1.2)$$

का पूर्ण उपसमष्टि है तब प्रत्येक $i \in N$ के लिये

(i) A_i और S में संपात है।

(ii) A_i और T में संपात है।

तथा, यदि $X=Y$ और प्रत्येक A_i, S (क्रमशः T) के साथ $C(A_i S)$ (क्रमशः $C(A_i T)$) पर क्रमविनिमयित होता है। तब

(iii) $A_i(i \in N)$, S और T का अद्वितीय स्थिर विन्दु होगा।

उपपत्ति

X में x_0 लें। क्योंकि

$$A_1(X) \subseteq T(X),\ x_1 \in X$$

इस प्रकार ले सकते हैं कि $Tx_1 = A_1 x_0$। इसी प्रकार, क्योंकि

$$A_2(X) \subset S(X),\ x_2 \in X$$

इस प्रकार है कि $Sx_2 = A_2 x_1$। व्यापक रूप में, हम X में अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा Y में $\{y_n\}$ की रचना इस प्रकार कर सकते हैं कि

$$y_{2n} = Sx_{2n} = A_{2n} x_{2n-1}$$

और

$$y_{1n+1} = Tx_{2n+1} = A_{2n+1}\, x_{2n}$$

निश्चयात्मक कथन 1

$$d_n = d(y_n, y_{n+1}, a),\ d_n \to 0$$

के लिये, (1.1) से

$$d_{2n+1} = d(A_{2n+1}\, x_{2n}, A_{2n+2}\, x_{2n+1}, a)$$

$$\leqslant \phi\ (\max \{d_{2n}, d_{2n}, d_{2n+1}, \tfrac{1}{2} d(y_{2n}, y_{2n+2}, a\ )\}),$$

अर्थात्

$$d_{2n+1} \leqslant \phi \max \{d_{2n}, d_{2n+1}, \tfrac{1}{2} d(y_{2n}, y_{2n+2} - a)\}). \tag{1.3}$$

मान लें $w_n = d(y_1, y_{n+1}, y_{n+2})$। यदि $w_{2n} \neq 0$ तब (1.3) में $a = y_{2n}$ लेने पर $w_{2n} \leqslant \phi(w_{2n}) < w_{2n}$, प्राप्त होता है जो एक विरोध है। इसलिये

$$w_{2n} = 0. \tag{1.4}$$

क्योंकि

$$d(y_{2n}, y_{2n+2}, a \leqslant d_{2n} + d_{2n+1} + d(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+2})$$

$$= d_{2n} + d_{2n+1},$$

(1.3) से

$$d_{2n+1} \leqslant \phi\ (\max \{d_{2n}, d_{2n+1}, \tfrac{1}{2}(d_{2n} + d_{2n+1})\}).$$

प्राप्त होता है।

यदि $d_{2n+1} \neq 0$ और $d_{2n+1} > d_{2n}$, तब

$$d_{2n+1} \leqslant \phi\ (\max \{d_{2n+1}, \tfrac{1}{2}(d_{2n+1} + d_{2n})\})$$

$$= \phi\ (d_{2n+1}) < d_{2n+1}.$$

इसलिये

$$d_{2n+1} \leqslant d_{2n} \text{ और } d_{2n+1} \leqslant \phi\,(d_{2n}).$$

इसी तरह

$$w_{2n+1}=0, \tag{1.4'}$$

$$d_{2n+2} \leqslant d_{2n+1} \text{ और } d_{2n+2} \leqslant \phi\,(d_{2n+1}).$$

इसी प्रकार, प्रत्येक $n \in N$ के लिये,

$$d_{n+1} \leqslant d_n \text{ और } d_{n+1} \leqslant \phi\,(d_n)$$

अब प्रयेयिका के आलोक में निश्चयात्मक कथन सत्य है।

निश्चयात्मक कथन 2.

जबकि

$$m \in N,\ d(y_n, y_{n+1}, y_m)=0.$$

अब, (1.4) और (1.4′) के आलोक में

$$d(y_n, y_{+n1}, y_{n+2})=0,\ n \in N.$$

स्पष्टतया यह निश्चयात्मक कथन $m=n, n+1$ के लिये सत्य है। यदि $m>n+1$, मान लें $m=n+p, p>1$।

$$\begin{aligned}
d(y_n, y_{n+1}, y_m) &\leqslant d(y_n, y_{m+1}, y_{m-1})+d(y_m, y_{m-1}, y_n)\\
&\quad +d(y_m, y_{m-1}, y_{n+1}) \leqslant d(y_n, y_{n+1}, y_{m-1})\\
&\quad +\phi(d(y_{m-1}, y_{m-2}, y_n))+\phi(d(y_{m-1}, y_{m-2}, y_{n+1}))\\
&=d(y_n, y_{x+1}, y_{n+p-1})+\phi\,(d(y_{n+p-1}, y_{n+p-2}, y_n))\\
&\quad +\phi\,(d(y_{n+p-1}, y_{n+p-2}, y_{n+1})) \leqslant d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1})\\
&\quad +\phi^{p-1}(d(y_{n+1}. y_n, y_n)+\phi^{p-1}(d(y_{n+1}, y_n, y_{n+1}))\\
&=d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1})+2\phi^{p-1}(0),
\end{aligned}$$

अर्थात्

$$\begin{aligned}
d(y_n, y_{n+1}, y_m) &\leqslant d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1})\\
&\leqslant d(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-2}) \leqslant \ldots\\
&\leqslant d(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})=0.
\end{aligned}$$

यदि $m<n$, मान लें $n=m+t$, $t\geqslant 1$. तब, क्योंकि

$$d_{n+1}\leqslant d_n,$$

$$d(y_n, y_{n+1}, y_m)=d(y_{m+t}, y_{m+t+1}, y_m)$$
$$\leqslant d(y_{m+t-1}, y_{m+t}, y_m)\leqslant\ldots$$
$$\leqslant d(y_m, y_{m+1}, y_m)=0.$$

निश्चयात्मक कथन 3.

$$d(y_i, y_j, y_p)=0,\ i, j, p\in N.$$

व्यापकता की किसी भी हानि के बिना हम $j<p$ ले सकते हैं। मान लें $p=j+r$, $r\geqslant 1$ । तब

$$d(y_i, y_j, y_{j+r})\leqslant d(y_i, y_j, y_{j+r-1})+d(y_i, y_{j+r-1}, y_{j+r})$$
$$+d(y_{j+r-1}, y_j, y_{j+r}).$$

अन्तिम दो पद निश्चयात्मक कथन 2 से शून्य हो जाते हैं। इसलिये

$$d(y_1, y_j, y_{j+r})\leqslant d(y_i, y_j, y_{j+r-1})\leqslant d(y_i, y_j, y_{j+r-2})\leqslant\ldots$$
$$\leqslant d(y_i, y_j, y_j)=0.$$

इस प्रकार कथन सिद्ध होता है।

निश्चयात्मक कथन 4

$\{y_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है।

यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि $\{y_{2n}\}$ एक कोशी अनुक्रम है। मान लें कि ऐसा नहीं है। तब $\epsilon>0$ ऐसा है कि प्रत्येक पूर्णांक $2k$ के लिये पूर्णांक $2n(k)$ और $2m(k)$

$2k\leqslant 2n(k)<2m(k)$ को संतुष्ट करते हुये इस प्रकार हैं कि किसी $a\in Y$ के लिये

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)>\epsilon. \quad (1.5)$$

प्रत्येक पूर्णांक $2k$ के लिये मान लें $2m(k)$, $2n(k)$ से अधिक न्यूनतम ऐसा पूर्णांक है जो (1.5) को संतुष्ट करता है। इस प्रकार

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a\leqslant\epsilon. \quad (1.6)$$

प्रत्येक $2k$ के लिये

$$\epsilon<d(y_{2n(k)}, y_{3m(k)}, a)$$
$$\leqslant d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a)+d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2})$$
$$+d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, a).$$

क्योंकि मध्य पद (यहाँ तथा निम्नलिखित असमिका के दायें पक्ष में भी शून्य हो जाता है) और

$$d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, a) \leqslant d(y_{2m(k)}, y_{2m(k-1}, a)$$

$$+d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)-1})+d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)-2}, a)$$

हमें ज्ञात है

$$\epsilon < d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$

$$\leqslant d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a)+d_{2m(k)-1}+d_{2m(k)-3}.$$

(1.6) और निश्चयात्मक कथन 1 के प्रयोग करने पर

$$\lim_k d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)=\epsilon. \tag{1.7}$$

अब

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) \leqslant d(y_{2n(k)}, y_{2n(k)+1}, a)$$

$$+d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}, a)+d(y_{2m(k)}, y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}).$$

(यहाँ अन्तिम पद निश्चयात्मक कथन 3 से शून्य है)

$$=d_{2n(k)}+d(A_{2n(k)+1}x_{2n(k)}, A_{2m(k)}x_{2m(k)-1}, a)$$

$$\leqslant d_{2n(k)}+\phi\ (\max\ \{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}\ a), d_{2n(k)},$$

$$d_{2m(k)-1}, \tfrac{1}{2}[d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$

$$+d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)+1}, a)]\}). \tag{1.8}$$

क्योंकि

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a) \leqslant d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a)+d_{2m(k)-2}$$

$$+d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)}),$$

$$d(y_{2m(k-1}, y_{2n(k)+1}, a) \leqslant d_{2n(k)}+d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)}, a)$$

$$+d(y_{,m(k)-1}, y_{2n(k)+1}, y_{2n(k)})$$

और, निश्चयात्मक कथन 3 से इन असमिकाओं में से प्रत्येक में अन्तिम पद शून्य है, (1.8) से हमें ज्ञात है कि

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) \leqslant d_{2n(k)}+\phi\ (\max\ \{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a)$$

$$+d_{2m(k)-2}, d_{2n(k)}, d_{2m(k)-1},$$

$$\tfrac{1}{2}[2d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)+d_{2n(k)}+d_{2m(k)-2}]\}).$$

k को अनन्त करने पर निश्चयात्मक कथन 1 के साथ (1.6) और (1.7) प्रयोग करने पर $\epsilon \leqslant \phi(\epsilon) < \epsilon$, प्राप्त होता है जो $\epsilon > 0$ का विरोध है। इस प्रकार निश्चयात्मक कथन 4 सिद्ध हुआ।

अब हम निष्कर्ष (i) और (ii) को दर्शाते हैं। चूंकि $S(X) \cap T(X)$ 2-दूरीक समष्टि Y का पूर्ण:उपसमष्टि है अत: कोशी अनुक्रम $\{y_n\}$ किसी बिन्दु u पर अभिसरित होता है, और z एवं z' इस प्रकार हैं कि $z \in S^{-1}u$ और $z' \in T^{-1}u$.

इस प्रकार $u = Sz$ और (1.1) से

$$d(A_i z, y_{2n+2}, a) = d(A_i z, A_{2n+2} x_{2n+1}, a)$$

$$\leqslant \phi(\max \{d(Sz, y_{2n+1}, a), d(Sz, A_i z, a), d(y_{2n+1}, y_{2n+2}, a),$$

$$\tfrac{1}{2}[d(Sz, y_{2n+2}, a) + d(y_{2n+1}, A_i z, a)]\}).$$

इससे, सीमान्त मान लेने पर,

$$d(A_i, z, u, a) \leqslant \phi \,(\max \{0, d(u, A_i z, a), 0, \tfrac{1}{2} d(u, A_i z, a)\})$$

$$= \phi(d(u, A_i z, a)).$$

प्राप्त होता है।

यदि $u \neq A_i z$ तब क्यों कि d एक 2-दूरीक है, Y के कम से कम एक a के लिये

$$d(u, A_i, za) \neq 0.$$

अत:

$$d(A_i z, u, a) \leqslant \phi(d(u, A_i z, a)) < d(u, A_i z, a),$$

जो एक विरोध है। इस कारण $Sz = u = A_i z$ और यह किसी भी $i \in N$ के लिये सत्य है।

इसी प्रकार

$$Tz' = u = A_i z', \ i \in N.$$

प्रमेय का अन्तिम भाग सिद्ध करने के लिये, यह स्पष्ट है कि $C(A_i S)$ और $C(A_i T)$ अरिक्त समुच्चय हैं और उपर्युक्त

$$z \in C(A_i S), \ z' \in C(A_i T)$$

और u के लिये हमें ज्ञात है कि

$$Sz = A_i z = u = Tz' = A_j z',$$

$$A_i u = A_i Sz = SA_i z = Su,$$

और

$$A_j u = A_j Tz' = TA_j z' = Tu.$$

इन सम्बन्धों तथा (1.1) के प्रयोग से हम निम्न परिणाम पर पहुंचते हैं।

$$d(A_i z, A_j u, a) \leqslant \phi \,(\max \{d(Sz, Tu, a), d(Sz, A_i z, a),$$

$$d(Tu, A_j u, a), \tfrac{1}{2}[d(Sz, A_j u, a)$$

$$+ d(Tu, A_i z, a)]\}).$$

अर्थात्

$$d(u, A_j u, a) = \phi\ (du, A_j u, a)),$$

फलस्वरूप $u = A_j u$ । यह किसी भी $j \in N$ के लिये है । इस प्रकार

$$Tu = A_j u = Su = u,\ i \in N.$$

अब हम प्रमेय 1 एक के परिवर्त का उल्लेख करते हैं परन्तु कुछ परिभाषायें दे रहे हैं ।

परिभाषा 2·

मान लें S, T और $A_i (i \in N) X$ पर ऐसे प्रतिचित्रण हैं जिनके मान 2-दूरीक समष्टि Y में हैं, यदि, X में किसी x_0 के लिये X में अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा Y में $\{y_n\}$ इस प्रकार हों कि

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = A_{2n+1} x_{2n}$$

और

$$y_{2n+2} = Sx_{2n+2} = A_{2n+2} x_{2n+1},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

तब

$$0(A_i; S, T, x_0) = \{y_n\}$$

को x_0 के सापेक्ष $(A_i; S, T)$ कक्षकतः पूर्ण कहा जायेगा अथवा केवल $(A_i; S, T, x_0)$ कक्षकतः पूर्ण कहा जायेगा यदि कोशी अनुक्रम $\{y_n\}$, Y में अभिसरित हो ।

प्रायिकतात्मक दूरीक समष्टि Y में $Y = X$ तथा $P = A_i$, $i \in N$ लेकर इन परिभाषाओं के लिये सिंह तथा पंत[27] का अवलोकन करें । ([1] और [32] भी देखें) ।

प्रमेय 2

मान लें X एक मनमाना समुच्चय, Y एक 2-दूरीक समष्टि और $A_i (i \in N) : X \to Y$ हैं । यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \to Y$ इस प्रकार हैं कि प्रत्येक $x, y \in X$ प्रत्येक $a \in Y$, $i, j \in N$, $i \neq j$ के लिये शर्त (1.1) संतुष्ट होती है और (2.1) X में x_0 इस प्रकार है कि

$$S(X) \cap T(X),\ (A_i; S, T, x_0)$$

कक्षकतः पूर्ण है, तब प्रमेय 1 की शर्तें (i) और (ii) सन्तुष्ट होती है और $0(A_i: S, T, x_0)$ $S.T.$ और A_i, $i \in N$ के संपाती मान पर अभिसरित होता है अर्थात् यदि $0(A_i; S, T, x_0)$ बिन्दु u पर अभिसरित होता है, तब z और $z' X$ में इस प्रकार हैं कि

$$Sz = A_i z = u = Tz' = A_i z'.$$

और यदि $X = Y$ तथा प्रत्येक $i \in N$ के लिये,

$$SA_i z = A_i Sz \text{ और } TA_i z' = A_i Tz',$$

तब (iii) $A_i (i \in N)$, S और T का अद्वितीय सर्वनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

$S, T, A_i (i \in N) : X \to Y$ के लिये निम्न शर्त पर विचार करें :

$$d(A_i x, A_j y, a) \leqslant \phi (\max \{d(Sx, Ty, a), d(Sx, A_i x, a), d(Ty, A_j y, a), d(Sx, A_j y, a), d(Ty, A_i x, a)\}).$$

$x, y \in X, a \in Y, i, j \in N, i \neq j.$

हमारा कथन है कि (1.1) से (3.1) प्राप्त होती है अर्थात् (1.1) को सन्तुष्ट करते हुये प्रतिचित्रण A_i, S, T (3.1) को भी सन्तुष्ट करते हैं। तथा प्रमेय 1-2 (1.1) को (3.1) से विस्थापित करने पर कुछ अतिरिक्त शर्तों के अभाव में, यहाँ तक कि दूरीक समष्टि में भी प्रायः असत्य होंगी। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें। यह डो होग तान से व्यक्तिगत पत्राचार में प्राप्त हुआ था यद्यपि संदर्भ भिन्न था। शास्त्री एवं नायडू[18] का भी अवलोकन करें।

उदाहरण 1

मान लें कि (M, d) एक दूरीक समष्टि है जहाँ

$M = \{a, b, a', b'\}$ $d(a, a') = d(a, b') = d(b, a') = d(b', b) = 1$ $d(a, b') = d(a', b') = 2$
मान लें P और Q M पर प्रतिचित्र इस प्रकार हैं कि

$$P(a) = P(a') = b, \; P(b) = P(b') = a,$$

$$Q(a) = Q(b') = a', \; Q(b) = Q(a') = b'$$

क्योंकि

$$P(M) = \{a, b\}, \; Q(M) = \{a', b'\},$$

इस प्रकार सदैव $d(Px, Qy) = 1$. तथा

$$\max \{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), d(y, Sx), d(x, Ty)\} = 2.$$

हमारा कथन है कि

$$\{P, Q\} = \{A_i (i \in N) : M \to M\}$$

और $S = T$ जो M पर तत्समक प्रतिचित्रण हैं, के लिये (3.1) का दूरीक सदिश निम्न है :

$$d(Px, Qy) \leqslant \phi (\max\{d(x, y), d(x, Px), d(y, Qy), d(x, Qy), d(y, Px)\}), \; x, y \in M. \quad (3.1')$$

स्पष्टतया (3.1') $\phi(t) = kt$, $k \in [\frac{1}{2}, 1)$ के लिये सन्तुष्ट होती है और P, Q में संपात नहीं है।

प्रमेय 3.

मान लें X कोई मनमाना समुच्चय, Y एक 2- दूरीक समष्टि और $A_i(i \in N) : X \to Y$ हैं; यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \to Y$ इस प्रकार हैं कि समस्त $x, y \in X$ तथा $a \in Y, i, j \in N, i \neq j$ के लिये शर्तें (3.1), (2.1) और (3.2) $\lim_n d(y_n, y_{n+1}, a) = 0$, सन्तुष्ट होते हैं तब प्रमेय 1 के निष्कर्ष (i) और (ii) प्राप्त होते हैं और

$$0(A_i; S, T, x_0) \text{ S, } T \text{ और } A_i \ (i \in N)$$

के संपात मान पर अभिसरित होता है। वास्तव में, यदि $y_n \to 0$ तब X में z, z' इस प्रकार हैं कि

$$A_i z = Sz = u = A_i z' = Tz', \ i \in N.$$

तथा, यदि $X = Y$ और प्रत्येक $i \in N$ के लिये $SA_i z = A_i Sz$ और $TA_i z' = A_i Tz'$ तब (iii) $A_i(i \in N)$, S और T का अद्वितीय सर्वनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

उपपत्ति

उपपत्ति आवश्यक परिवर्तनों के साथ प्रमेय 1 की उपपत्ति की तरह है।

प्रमेय 4.

मान ले X कोई मनमाना समुच्चय, Y एक 2-दूरीक समष्टि और $A_i(i \in N) : X \to Y$ हैं। यदि प्रतिचित्रण $S, T : X \to Y$ इस प्रकार है कि समस्त $x, y \in X$ समस्त $a \in Y, i, j \in N, i \neq j$ के लिये शर्तें (3.1) और (2.1) और (3.2′) $0(A_i; S, T, x_0)$ ऐसा है कि n के अनन्त होने की स्थिति में

$$\text{Sup } \{d(y_p, y_q, a) | p \geq n, q \geq n, a \in Y \text{ और } p, q \text{ समान पैरिटी के नहीं है}\}$$

$$= \text{Sup } \{d(y_p, y_q, a) | p \geq n, q \geq n, a \in Y\} < \infty;$$

तब प्रमेय 1 के निष्कर्ष (i) और (ii) निकलते हैं और $0(A_i; S, T, x_0)$ प्रतिचित्रणों S, T और $A_i, i \in N$ के संपात मान पर अभिसरित होता है। वास्तव में, यदि $y_n \to u$ तब X में z और z' इस प्रकार हैं कि

$$A_i z = Sz = u = A_i z' = Tz', \ i \in N$$

और यदि $X = Y$ और प्रत्येक $i \in N$ के लिये

$$SA_i z = A_i Sz \text{ एवं } TA_i z' = A_i Tz',$$

भी हों, तब, (iii) $A_i(i \in N)$, S और T का अद्वितीय उभनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

उपपत्ति

प्रमेय 1 तथा 3 की उपपत्तियों के आलोक में, यह सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि $\{y_n\}$ पर कोशी अनुक्रम है । यह सिद्ध करने के लिये, मान लें

$$\delta_n = \text{Sup}\,\{d(y_p, y_q, a) |\ p \geqslant n,\ q \geqslant n,\ a \in Y\}.$$

तब प्रत्येक $n \in N$ के लिये δ_n परिमित है । चूंकि किसी भी $n \in N$ के लिये $\delta_n > \delta_n + 1$ इसलिये अनुक्रम $\{\delta_n\}$ किसी $\delta \geqslant 0$ पर अभिसरित होता है । मान लें कि $\delta > 0$ संभव है । यदि $p = 2m$ और $q = 2t+1$ लेने पर $p \geqslant n+1$ और $q \geqslant n+1$, तब

$$d(y_p, y_q, a) = d(A_{2t+1}x_{2t}, A_{2m}x_{2m-1}, a)$$

$$\leqslant \phi \max\{d(y_{2t}, y_{2m-1}, a), d(y_{2t}, y_{2t+1}, a),$$

$$d(y_{2m-1}, y_{2m}, a), d(y_{2t}, y_{2m}, a), d(y_{2m-1}, y_{2t+1}, a)\})$$

$$\leqslant \phi\,(\max\{\delta_n, \delta_n, \delta_n, \delta_n, \delta_n\}),$$

अर्थात्

$$\delta_{n+1} \leqslant \phi\,(\delta_n).$$

इसलिये, ϕ के उपरि सामिसांतत्य से, सीमान्त मान लेने पर

$$\delta \leqslant \phi\,(\delta) < \delta.$$

जो एक विरोध हैं । अतः $\delta = 0$, और $\{y_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है ।

प्रमेय 1-4.

बहुत सी, दूरीक तथा 2-दूरीक समष्टियों में संपाती और स्थिर बिन्दु प्रमेयों का विस्तार, सुधार और व्यापीकीकरण करती हैं । अब हम कुछ उपप्रमेय स्थापित करते हैं तथा कुछ संदर्भों का उल्लेख करते हैं ।

उपप्रमेय 1

मान लें Y एक 2-दूरीक समष्टि और P, Q, S, T प्रतिचित्रण Y पर इस प्रकार हैं कि

$$P(Y) \cup Q(Y) \subset S(Y) \cap T(Y).$$

यदि अचर $k \in (0, 1)$ इस प्रकार है कि

$$d(Px, Qy, a) \leqslant k \max\{d(Sx, Ty, a), d(Sx, Px, a).$$

$$d(Ty, Qy, a), \tfrac{1}{2}[d(Sx, Qy, a) + d(Ty, Px, a)]\} \quad \text{(C.1)}$$

समस्त $x, y, a \in Y$ के लिये। यदि

$$S(Y) \cap T(Y), Y \tag{C.2}$$

का पूर्ण उपसमष्टि है, और

$$PS=SP, QT=TQ \tag{C.3}$$

तब P, Q, S और T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

उपपत्ति

मान लें $\{A_i | i \in N\}=\{P, Q\}$ और $\phi(t)=kt$। तब प्रमेय 1 के निष्कर्षों (i) और (ii) के आलोक में $S(Y) \cap T(Y)$ में u और Y में z, z' ऐसे हैं कि

$$Pz=Sz=u=Qz'=Tz'.$$

(C.3) से,

$$Su=SPz=PSz=Pu$$

और

$$Tu=TQz'=QTz'=Qu$$

(C.1) से,

$$d(u, Qu, a)=d(Pz, Qu, a)$$
$$\leqslant kd(u, Qu, a),$$

फलस्वरूप $Qu=u$. इसी प्रकार $Pu=u$. P, Q, S, और T के उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु के रूप में u की अद्वितीयता सरलता से प्राप्त की जा सकती है।

उपप्रमेय 2 : मान लें Y एक 2-दूरीक समष्टि और P, Q, S, T प्रतिचित्रण Y पर इस प्रकार हैं कि Y के x, y, a और किसी अचर $k \in (0, 1)$ के लिये,

$$d(Px, Qy, a) \leqslant k \max \{d(Sx, Ty, a), d(Sx, Px, a),$$
$$d(Ty, Qy, a), d(Sx, Qy, a), d(Ty, Px, a)\}, \tag{C.4}$$

Y में x_0 ऐसा है कि

$$S(Y) \cap T(Y), (P, Q, S, T, x) \tag{C.5}$$

कक्षकतः पूर्ण है, और

$$PS=SP, QT=TQ. \tag{C.6}$$

यदि शर्तों (3.2) और (3.2′) में से कोई भी $\{A_i\}=\{P, Q\}$ के साथ संतुष्ट हो, तब P, Q, S, T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

उपपत्ति

इस प्रकार परिभाषित करें कि

$$\{A_i | \, i \in N\} = \{P, Q\} \text{ और } \phi(t) = kt.$$

तब प्रमेय 3-4 के आलोक में बिन्दु u, z, z' ऐसे हैं कि

$$Pz = Sz = u = Qz' = Tz'.$$

उपपत्ति का शेषांश उपप्रमेय 1 की उपपत्ति का अनुसरण करके पूरा किया जा सकता है।

टिप्पणी 1

उपप्रमेय 1 की उपपत्ति से यह स्पष्ट है कि क्रमविनिमेयता की शर्त (C.3) को काफी दुर्बल रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$PSy = SPy \text{ समस्त } y \in C(PS) \tag{C.3$'$}$$

के लिये, और

$$QTy = TQy \text{ समस्त } y \in C(QT)$$

के लिये अर्थात् समुच्चय Y के समस्त बिन्दुओं पर क्रमविनिमेयता की आवश्यकता नहीं है (देखें (C.3)) हमें केवल प्रतिचित्रणों (S, P) और (T, Q) के, उनके संपाती बिन्दुओं पर क्रमविनिमयित होने की आवश्यकता है। उपप्रमेय 2 की भी गणनायें इसी प्रकार हैं। वास्तव में (C.6) (C.3′) से भी विस्थापित की जा सकती है।

2. **उपप्रमेय** 1 : Y को पूर्ण तथा S, T, d को संतत लेकर [11] में प्रकाशित हुई है। संकुचन शर्त (C.1), अधिक दृढ़ क्रमविनिमयता तथा विभिन्न पुनरावृत्ति योजना के अधीन स्थिर बिन्दु प्रमेय के लिये सिंह तथा राम [28] का अवलोकन करें।

3. **उपप्रमेय** (3.2) अथवा (3.2′) के अभाव में आवश्यक नहीं कि सत्य हो, यहाँ तक कि दूरीक समष्टि में भी सत्य होना आवश्यक नहीं है। प्रमेय 2 के बाद का उदाहरण अथवा शास्त्री तथा नायडु [18] देखें।

4. $X = Y$, $\{A_i | \, i \in N\} = \{P, Q\}$, दृढ़तर क्रमविनिमयता की शर्त और विभिन्न पुनरावृत्ति योजना लेकर प्रमेय 4 जैसी स्थिर बिन्दु प्रमेयों के लिये सिंह और नोरिस[26,23] का अवलोकन करें।

5. सिंह[22] का मुख्य परिणाम $P = Q$, Y और S, T, d संतत के लिये उपप्रमेय 1 है। सिंह और नारायण[25] को मुख्य स्थिर बिन्दु प्रमेय उपप्रमेय 1 से $P = Q$ रखने पर प्राप्त होता है।

6. हैडजिक[7] का मुख्य परिणाम प्रमेय 1 दूरीक सदृश की विशेष स्थिति है। वास्तव में, उन्होंने सिद्ध किया है कि $A_i| i \in N\}$, $S,T : M$ (एक पूर्ण दूरीक समष्टि)$\rightarrow M$ जो

$$A_iS=SA_i,\ A_iT=TA_i\ \ A_i \subset S(M) \cap T(M),\ i \in N$$

और

$$d(A_ix, A_jy) \leqslant kd(Sx, Ty) x, y, \in M\ i, j, \in N,\ i \neq j,\ k \in (0, 1)$$

को सन्तुष्ट करते हैं उनका S और T के संतत होने पर एकमात्र उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होगा।

7. निर्देशों[25,30–33] में प्रकाशित मुख्य संपाती प्रमेय, प्रमेय 1-4 की विशेष स्थितियों के रूप में प्राप्त की जा सकती है। जैसे वीरेन्द्र[32] की प्रमेय 1 और 2 क्रमशः प्रमेयों 4 और 2 से $\{A_i| i \in N\} = \{P, Q\}$ और $S=T$ लेकर प्राप्त होती है। 2-दूरीक समष्टि में मान वाले मनमाने समुच्चय पर प्रति-चित्रण युगल के लिये प्रथम संपाती प्रमेय (प्रमेय 1, [30]) प्रमेय 1 से $\{A_i| i \in N\} = \{P\}$, $S=T$ और $\phi(t)=kt$, $k \in (0, 1)$ के लिये प्राप्त की जा सकती हैं।

8. **प्रमेय** 4 : के (संपाती भाग का) दूरीक सदृश में $\{A_i| i \in N\} = \{P\}$ लेकर सिंह तथा कुलश्रेष्ठ[24] की कुछ उन्नत स्थिति प्राप्त होती है।

9. **उपप्रमेय 1** में $P=Q$ और $S=T=Y$ पर तत्समक प्रतिचित्रण लेकर, बानाख संकुचन सिद्धान्त को (2-दूरीक समष्टि पर) सम्मिलित किया गया है। वास्तव में, $P : Y \rightarrow Y$ की संकुचन कहते हैं, यदि, समस्त $x, y, a \in Y$ और $k \in (0, 1)$ के लिये

$$d(Px, Py, a) \leqslant kd(x, y, a)$$

इसे $P=Q$ और S, T तत्समक प्रतिचित्रण मानकर (C.1) में लिया गया है। जैसा कि सुविदित है कि यदि P एक 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन है तो P का अद्वितीय स्थिर बिन्दु होगा।

10. **प्रमेय 1** (iii) का, $X=Y$, S अथवा T संतत और $A_i(i \in N)$ को S और T के साथ पूरे समष्टि पर दुर्बल क्रमविनिमयी लेकर प्राप्त परिणाम का दूरीक तुल्य रूप सेसा इत्यादि[20] द्वारा दिया गया है।

11. $X=Y$, S और T संतत और

$$SPx=PSx,\ QTx=TQx$$

Y के प्रत्येक x के लिये लेकर मिजको और पाल्जेवस्की[13] ने शर्त (C.4) प्रयुक्त करके हाल ही में स्थिर बिन्दु प्रमेय प्राप्त की है।

अब हम कुछ अनुप्रयोग देते हैं।

प्रमेय 5.

मान ले Y एक 2-दूरीक समष्टि और $P, Q : Y\times Y\to Y$ है। यदि प्रतिचित्रण $S, T: Y\times Y\to Y$ इस प्रकार हैं कि प्रत्येक $y \in Y$ के लिये

$$P(Y\times\{y\}) \cup Q(Y\times\{y\}) \subset S(Y\times\{y\}) \cap T(Y\times\{y\}) \quad (5.1)$$

Y के समस्त x, y, x', y' a और H में किसी ϕ के लिये

$$\begin{aligned} & d(P(x, y), Q(x', y'), a) \\ \leqslant \phi\ (\max\ \{ & d(S(x, y), T(x', y'), a), \\ & d(S(x, y), P(x, y), a), d(T(x', y'), Q(x', y'), a), \\ & \tfrac{1}{2}[d(S(x, y), Q(x', y)\ a)+d(T(x', y'), P(x, y), a)]\}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

प्रत्येक $y \in Y$ के लिये

$$S(Y\times\{y\}) \cap T(Y\times\{y\}), \quad (5.3)$$

Y का पूर्ण उपसमष्टि है, और समस्त $x, y \in C(PS)$ के लिये

$$P(S(x, y), Y=S(P(x, y), Y) \quad (5.4)$$

और समस्त $x, y \in C(Q, T)$ के लिये

$$Q(T(x, y), Y=T(Q(x, y), Y);$$

तब ठीक एक बिन्दु b इस प्रकार है कि समस्त $y \in Y$ के लिये,

$$P(b, y)=Q(b, y)=S(b, y)=T(b, y)=b.$$

उपपत्ति

Y में निश्चित y और y' के लिये असमिका (5.2) के संगत शर्त (1.1) और

$$\{A_i \mid i \in N\}=\{P, Q\}, X=Y$$

है। इसके अतिरिक्त, Y में निश्चित y के लिये (5.4) के अनुसार (P, S) और (Q, T) अपने संपाती बिन्दु पर क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल हैं। इसलिये, प्रमेय 1 (iii) के आलोक में, Y के प्रत्येक y के लिये Y में एक और केवल एक $x(y)$ ऐसा होगा कि

$$P(x(y), y)=Q(x(y), y)=S(x(y), y)=T(x(y), y)=x(y).$$

Y के प्रत्येक y, y' के लिये, (5.2) से हम

$$d(x(y), x(y'), a)=d(P(x(y), y), Q(x(y'), y'), a)$$
$$\leqslant \phi\, (d(x(y), x(y'), a))$$

प्राप्त करते हैं। फलस्वरूप, क्योंकि a मनमाना है, $x(y)=x(y')$। अतः $x(.)$, Y में कोई अचर b है। इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण होती है।

यह प्रमेय[6,95,29–32] के संगत परिणामों का विस्तार, सुधार एवं व्यापकीकरण करती है। उदाहरण के लिये [प्र० 2, 29] का कुछ सुधरा हुआ रूप प्रमेय 5 में

$$P=Q,\ S=T \text{ और सिंह } \phi(t)=kt,\ k \in (0, 1)$$

लेकर प्राप्त होता है।

निम्न प्रमेय आइसेकी[10] और सिंह [21] के परिणामों का विस्तार करती है।

प्रमेय 6.

मान लें Y एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि और, P, Q, S, T प्रतिचित्रण Y पर इस प्रकार हैं कि शर्तें (5.1) (5.3), (5.4) सन्तुष्ट होती हैं, और

$$d(P(x, y), Q(x', y'), a)\leqslant k \max\{d(S(x, y), P(x, y), a),$$
$$d(T(x', y'), Q(x', y'),\ y', a)\} \tag{6.1}$$

Y के समस्त अवयवों x, y, x', y', a और $k \in (0, 1)$ के लिये। तब Y में ठीक एक बिन्दु b इस प्रकार होगा कि

$$P(b, b)=Q(b, b)=S(b, b)=T(b, b)=b$$

उपपत्ति

उपपत्ति के लिये प्रमेय 5 की तकनीक अनुसरण करते हुये और उपप्रमेय 1 का प्रयोग करने पर, यह देखा जा सकता है कि Y के प्रत्येक y के लिये Y में ठीक एक $x(y)$ इस प्रकार होगा कि

$$P(x(y), y)=Q(x(y), y)=S(x(y), y)$$
$$=T(x(y), y)=x(y). \tag{6.2}$$

किसी $y, y', a \in Y$ के लिये, (6.1) और (6.2) से

$$d(x(y), x(y'), a)=d(P(x(y),y), Q(x(y'), y'), a)$$
$$\leqslant kd(y, y', a).$$

इस प्रकार $x(.)$ पूर्ण Y पर एक संकुचन है और बानाख संकुचन सिद्धान्त से (देखें टिप्पणी 9), Y में अद्वितीय बिन्दु b इस प्रकार होगा कि $x(b)=b$ । इसलिये (6.2) से,

$$P(b, b)=Q(b, b)=S(b, b)=T(b, b)=b.$$

टिप्पणी 12

इस प्रपत्र के मुख्य परिणाम, यहाँ तक कि 1-दूरिक समष्टि में मान वाले प्रतिचित्रणों के लिये भी नये हैं (टिप्पणी 6 और 10 भी देखें). वास्तव में, प्रमेय 1-6 के परिणाम 1-दूरिक समष्टि में मान रखने वाले प्रतिचित्रणों हेतु अनेक सम्पाती प्रमेयों तथा 1-दूरीक समष्टि पर क्रमविनिमयी, अक्रमविनिमयी व दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु ढेर सारे स्थिर बिन्दु प्रमेयों को विस्तारित, एकीकृत एवं व्यापकीकृत करते हैं (उदाहरणार्थ [7], [9]-[12], [18]-[20], [23], [24], [27] तथा विस्तृत सन्दर्भ हेतु रोअड्स आदि [17] को देखें) ।

हसियाओं के हाल के एक शोधक प्रपत्र पर टिप्पणी .

हाल ही में चिह्-रू हसियाओं (Chih-Ru Hsiao [8]) में 2-दूरिक समष्टि में मान वाले संकुचित प्रकार के प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिन्दु प्रमेयों की उपपत्ति में एक विशेष प्रकार की तकनीक पाये जाने का उल्लेख किया है । उनके द्वारा जिन प्रतिचित्रणों पर विचार किया गया है ([8] में प्रमेय 1-2 व टिप्पणी 3 देखें), वे $X=Y$, $\{A|_i\epsilon N\}=\{P\}$ या $\{P,Q\}$ एवं $S=T=(Y$ पर तत्समक प्रतिचित्रण) मानने पर प्रतिचित्रण शर्त (3.1) से अधिक व्यापक नहीं है । उन्होंने यह पाया कि 2-दूरीक समष्टि Y में संकुचनीय प्रकार का प्रतिचित्रण P पिकार्ड के पुनरावर्तकों के अनुक्रम $\{x_n|x_n=Px_{n-1}, n=1, 2, ...\}$ के लिये निम्न शर्त को सन्तुष्ट करता है :

(H) समस्त $i, j, q \in N$ तथा समस्त $x_0 \in Y$ के लिये $d(x_i, x_j, x_q)=0$. यदि, समस्त $x_0 \in y$ के लिये व प्रतिचित्रणों P, Q के लिये पुनरावर्तकों का अनुक्रम

$$\{x_n|x_{2n+1}=Px_{2n}, x_{2n+2}=Qx_{2n+1}, n=0, 1, 2, ...\}$$

H को सन्तुष्ट करें तब यह कहा जाता है कि P और Q सर्वनिष्ठ गुणधर्म (H) रखते हैं (देखें [8]) । उनके अनुसार, यदि $(Y, d)=\{R^2, A)$ जहाँ $A(x, y, z)$ उस त्रिभुज का क्षेत्रफल है जो R^2 के बिन्दुओं x, y, z को मिलाने से बनता है, तब संकुचनीय प्रतिचित्रण P के पुनरावर्तक निश्चय ही एक सरल रेखा पर होंगे । वे यह अनुभव करते हैं कि इस परिघटना में प्रतिचित्रण तुच्छ हो जाता है, और फलस्वरूप 2-दूरीक समष्टि के गुणों का पुनः सूत्रण किया जाना चाहिये ताकि इस तरह की परिघटना से बचा जा सके । ऐसा सोचना समीचीन नहीं है क्योंकि 2-दूरीक समष्टि की परिकल्पना केवल स्थिर बिन्दु प्रमेयों के लिये नहीं की गई थी ।

हमारे स्थिर बिन्दु प्रमेयों में चार प्रतिचित्रणों के लिये परिभाषित (प्रमेय 1-4 देखें) पुनरावर्तकों का अनुक्रम पिकार्ड के पुनरावर्तकों के अनुक्रम से भिन्न से कम से कम तब तक जब तक S अथवा

T तत्समक प्रतिचित्रण नहीं हैं । हालांकि प्रमेय 3 की उपपत्ति के लिये निश्चयात्मक कथन 3 गुणधर्म (H) से सम्बन्धित है । अधिक महत्वपूर्ण बात यह है कि गुण धर्म (H) को सन्तुष्ट करता हुआ प्रतिचित्रण युगल $P, Q : Y \rightarrow Y$ आवश्यक नहीं कि हुसियाओं के अर्थ में तुच्छ हो । हम एक2-दूरीक समष्टि और हुसियाओं द्वारा प्रदत्त उदाहरण में से एक प्रतिचित्रण लेकर इसे स्पष्ट करते हैं ।

उदाहरण 2

मान लें $Y=[\frac{1}{2}, 1]^2$ और $d(x, y, z)$ उस त्रिभुज का क्षेत्रफल है जो बिन्दुओं $x; y, z \in Y$ को मिलाने से बनता है । प्रतिचित्रण $P, Q : Y \rightarrow Y$ इस प्रकार है कि

$$P((a, b))=(a^{1/2}, b^{1/2})$$

और

$$Q((a, b))=\begin{cases}(a^2, b^2) \text{ यदि } a^2 \geqslant \frac{1}{2}, b^2 \geqslant \frac{1}{2}, \\ (a^2, b) \text{ यदि } a^2 \geqslant \frac{1}{2}, b^2 < \frac{1}{2}, \\ (a, b) \text{ अन्यथा}\end{cases}$$

हुसियाओं ने यह दर्शाया है कि P अतुच्छ प्रतिचित्रण है । मान लें

$$x_0=(a, b), \tfrac{1}{2} \leqslant a, b \leqslant 1. \text{ तब}$$

$$x_1=Px_0=(a^{1/2}, b^{1/2})$$

$$x_2=Qx_1=(a, b)=x_0. \text{ आदि}$$

इस प्रकार यहाँ $\{x_n\}=\{x_1, x_0, x_1, x_0, \ldots\}$. स्पष्टतया P, Q सर्वनिष्ठ गुणधर्म (H) को सन्तुष्ट करते हैं । प्रतिचित्रण Q के लिये पिकार्ड अनुवर्तकों के अनुक्रम $\{z_n\}$ पर विचार करें तो,

$$z_0=((3^{1/4}/2^{1/2}), (2/3)^{1/4} \text{ तब}$$

$$z_1=Qz_0=((3^{1/2}/2), (2/3)^{1/2}),$$

$$z_2=Qz_1=(3/4, 2/3),$$

$$z_3=Qz_2=(9/16, 2/3),$$

और $d(z_1, z_2, z_3) \neq 0$. अतः Q गुण धर्म (H) को सन्तुष्ट नहीं करता । इस प्रकार प्रतिचित्रण Q भी हुसियाओं के अर्थों में अतुच्छ है ।

यह उल्लेख करना सन्दर्भ से परे नहीं होगा कि प्रमेयों 2-4 में हमें केवल प्रारम्भिक बिन्दु x_0 के लिये अनुक्रम $\{y_n\}$ के अस्तित्व की आवश्यकता है, जबकि अनुक्रम $\{x_n\}$ को किसी प्रारम्भिक बिन्दु x_0 (अर्थात समष्टि के प्रत्येक x_0) के लिये प्राप्त हो सकने वाले पिकार्ड अनुवर्तकों से सम्बन्धित गुणधर्म (H) को सन्तुष्ट करना पड़ेगा ।

निर्देश

1. चो, वाई० जे०, Pusan Kyongnam Math. J., 1985, 1, 81-88.

2. गहलर, एस०, Math. Nachr, 1963/64, **26**, 115-148.

3. वही, Math. Nachr, 1964, **28**, 1-43.

4. वही, Math. Nachr., 1965, **28**, 235-244.

5. वही, Revue Roumaine de Mathem. Pures et Appliquees, 1966, **11**, 675-667.

6. गांगुली, ए०, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 1982, **10**, 675-666.

7. हैडजिक, ओ०, Math. Japon, 1984, **29**, 127-134.

8. चिह्-रु-सियाओ, Jnanabha, 1980, **16**, 223-239.

9. आइसेकी, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1976, **4**, 211-214.

10. वही Math. Sem. Notes Kobe Univ., 1976, **4**, 215-216.

11. कुबियक, टी०, Math. Nachr.,1984, **118**, 123-127.

12. मीड, वी० ए० तथा सिंह, एस० पी०, Bull. Austral Math. Soc., 1977, **16**, 49-53.

13. मिजको, ए० तथा पालजेवस्की, बी०, Math. Nachr., 1985, **124**, 341-355.

14. नायडू, एस० वी० आर० तथा प्रसाद, जे० राजेन्द्र, Indian J. Pure. Appl. Math., 1986, **17**, 602-612.

15. राम, बी०, D. Phil. Thesis, Garhwal Univerlty, Srinagar, 1962.

16. रोअडस, बी० ई०, Math. Nachr., 1979, **91**, 151-153.

17. रोअडस, बी० ई०, सेसा, एस०, खान, एम० एस० तथा स्वालेह, एम०, J. Austral. Math. Soc. (Series A), **43**, 1987, 328-346.

18 शास्त्री, के० पी० आर० तथा नायडू, एस० वी० आर०, The Yokohama Math. J. Sac. 1980, **28**, 15-29.

19. सेसा, एस०, Publ. Inst. Math. (Beograd), 1982, **32**, (46), 149-153.

20. सेसा, एस०, मुखर्जी, आर० एन० तथा सोम, टी०, Math. Japan, 1986, **31**, 235-245.

21. सिंह, एस० एल०, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 1979, **7**, 1-11.

22. वही, Proc. Nat. Acad. Sci. Indian, 1983, **53**, (A), 107-112.

23. सिंह, एस० एल० तथा कासाहारा, एस०, Indian J. Pure Appl. Math., 1982, **13**, 757-761.

24. सिंह, एस० एल० तथा कुलश्रेष्ठ, सी०, Indian. J. Phy. Natur. Sci., 1983, **3 B**, 5-10.

25. सिंह, एस०एल० तथा नारायण, के० ए०, Nat. Acad. Sci. Letters, 1986, **9**, 19-22.

26. सिंह, एस० एल० तथा नोरिस, डी० डब्ल्यु, Indian J. Math. 1983, **25**, 165-170.

27. सिंह, एस० एल० तथा पंत, बी० डी०, Honam Math. J. 1984, **6**. 1-12.

28. सिंह, एस० एल० तथा राम, बी०, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1982, **10**' 197-208.

29. सिंह, एस० एल०, तिवारी, बी० एम० एल० तथा गुप्ता, वी० के०, Math. Nachr 1980, **95**, 293-297.

30. सिंह, एस० एल० तथा अरोरा वीरेन्द्र, Indian J. Phy. Natur. Sci., 1982, **2** B,32-35.

31. सिंह, एस० एल० तथा अरोरा, वीरेन्द्र, Pusan Kyongnam Math. J., 1817, **3**, 47-53.

32. अरोरा, वीरेन्द्र, Nep. Math. Sci. Rep.. 1985, **10**, 1-12.

33. वही, डी फिल थीसिस, गढ़वाल विश्वविद्यालय श्रीगनर, 1986.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 32. No. 3, 1989

बहुचरीय H-फलन के लिए कतिपय श्रेणी सूत्र

बी० पी० सिंह तथा वाई० एन० प्रसाद
सैप्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नालॉजी
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी वाराणसी

[प्राप्त—अप्रैल 19, 1988]

सारांश

हाल ही में प्रसाद द्वारा प्रवर्तित बहुचरीय I-फलन के लिये श्रेणी सूत्रों की स्थापना की गई है। चौरसिया एवं महाजन तथा सक्सेना ने हाल ही में जो परिणाम प्राप्त किये हैं वे हमारे परिणामों की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं।

Certain series formulae for the multivariable I-function. *By*·V. P. Singh and Y.N. Prasad, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper, we have established series formulae for the multivariable I-function, which has been introduced recently by Prasad [1]. A number of results can be obtained by specializing the parameters involved in the multivariable I-function. The results recently obained by Chaurasia [3] and Manajan and Saxena [4] are special cases of our result.

प्रसाद[1] तथा प्रसाद एवं यादव[2] द्वारा प्रवर्तित तथा अध्ययन किया गया बहुचरीय I-फलन निम्नवत् प्रदर्शित किया जावेगा।

$$I[x_1, \ldots, x_r] = I^{o,n_2 : \ldots : n_r : (m',n'); \ldots; (m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2 : \ldots : p_r,q_r; [p',q']; \ldots; [p^{(r)},q^{(r)}]}\left[x_1, \ldots, x_r \,\middle|\right.$$

$$(a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : (a_{3j}; \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j})_{1,p_3} : \ldots : (e_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r} :$$

$$(b_{rj};\beta'_{rj},\beta''_{rj})_{1,q_2}:(b_{3j};\beta'_{j},\beta''_{3j},\beta'''_{3j})_{1,q_3}:\ldots:(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r}:$$

$$\left.\begin{matrix}(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'};\ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}\\(b'_j,\beta'_j)_{1,q'};\ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s_1)\ldots\phi_r(s_r)\,\psi(s_1,\ldots,s_r)\,x_1^{s_1}\ldots x_r^{s_r}ds_1\ldots ds_r \tag{1.1}$$

जहाँ $w=\sqrt{-1}$

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod_{j=1}^{m^{(i)}}\Gamma(b_j^{(i)}-\beta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{n^{(i)}}\Gamma(1-a_j^{(i)}+\alpha_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}}\Gamma(1-b_j^{(i)}+\beta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}}\Gamma(a_j^{(i)}-\alpha_j^{(i)}s_i)}, \tag{1.2}$$

$\forall\ i\in\{1,\ldots,r\}$,

$$\psi(s_1,\ldots,s_r)=\frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-a_{2j}+\sum_{i=1}^{2}\alpha_{2j}^{(i)}s_t)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-a_{3j}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_{3j}^{(i)}s_i)\ldots}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(a_{2j}-\sum_{j=1}^{2}\alpha_{2j}^{(i)}s_i)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(a_{3j}-\sum_{i=1}^{3}\alpha_{3j}^{(i)}s_1)\ldots}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n_r}\Gamma(1-a_{rj}+\sum_{j=1}^{r}\alpha_{rj}^{(i)}s_i)}{\prod_{j=n_r+1}^{p_r}\Gamma(a_{rj}-\sum_{i=1}^{r}\alpha_{rj}^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma(1-b_{2j}+\sum_{i=1}^{2}\beta_{2j}^{(i)}s_i)\ldots\prod_{j=1}^{q_r}\Gamma(1-b_{rj}+\sum_{i=1}^{r}\beta_{rj}^{(i)}s_i)} \tag{1.3}$$

जहाँ ऊपर लिखा (i) डैशों की संख्या को बताता है यथा $a^{(1)}=a'$, $a^{(2)}=a''$ इत्यादि $(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'}$ तथा $(a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}$ संक्षिप्तीकरण है p' तथा p_2 प्राचलों के अनुक्रम का अर्थात् क्रमशः $(a'_1,\alpha'_1),\ldots,(a'_{p'},\alpha'_{p'})$ तथा $(a_{21}:\alpha'_{21},\alpha''_{21}),\ldots,(a_{2p_2};\alpha'_{2p_2},\alpha''_{2p_2})$, रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है, गुणांक $\alpha_j^{(i)},\beta_j^{(i)},\alpha_{kj}^{(i)},\beta_{kj}^{(i)}\ (i=1,\ldots,r;\ k=2,\ldots,r)$ धनात्मक वास्तविक हैं तथा $a_j^{(i)},b_j^{(i)}(i=1,$ $(i=1,\ldots,r)$, a_{kj}, b_{kj} $(k=2,r)$ संमिश्र संख्यायें हैं; $m^{(i)}$, $u^{(i)}$, $p^{(i)}$, $q^{(i)}(i=1,\ldots,r)$, n_k, p_k, q_k

$(k=2, \ldots, r)$ धन पूर्णांक हैं जिनसे $0 \leqslant m^{(i)} \leqslant q^{(i)}, 0 \leqslant n^{(i)} \leqslant p^{(i)}, q_k \geqslant 0, 0 \leqslant n_k \leqslant p_k$ की तुष्टि होती है।

संकुल S_i— तल में कंटूर L_1 मेलिन-बार्नीज प्रकार का है और अपने दंतुरों सहित $-w\infty$ से $+w\infty$ तक विस्तीर्ण रहता है जिससे कि $\Gamma(b_j^{(i)} - \beta_j^{(i)} s_i), (j=1, \ldots, m^{(i)})$ के सारे पोल L_i के दाईं ओर और $\Gamma(1-a_j^{(i)} + \alpha_j^{(i)} s_i); (j=1, \ldots, n^{(i)},)$

$$\Gamma(1-a_{2j} + \sum_{i=1}^{2} \alpha_{2j}^{(i)} s_i), (j=1, \ldots, n_2), \ldots, \Gamma(1-a_{rj} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{rj}^{(i)} s_i), (j=1, \ldots, n_r)$$

के पोल इसके बाईं ओर पड़ें।

कंटूर समाकल अभिसारी होता है यदि

$$|arg\ x_i| < 1/2 U_i \pi, U_i > 0, 1, \ldots, r; \tag{1.4}$$

जहाँ

$$U_i = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$

$$+ (\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)} - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)}) + \ldots + (\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj}^{(i)} - \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \alpha_{rj}^{(i)})$$

$$-(\sum_{j=1}^{q_2} \beta_{2j}^{(i)} + \ldots + \sum_{j=1}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)}). \tag{1.5}$$

ब्राक्समा[5] का अनुकरण करने पर देखा जा सकता है कि

$$I[x_1, \ldots, x_r] = 0\,(|x_1|^{\alpha_1} \ldots |x_r|^{\alpha_r}), \max\{|x_1|, \ldots, |x_r| \to 0,$$

जहाँ

$$\alpha_i = \min Re\left(\frac{b_j^{(i)}}{\beta_j^{(i)}}\right), (j=1, \ldots, m^{(i)}; i=1, \ldots, r) \tag{1.6}$$

तथा

$$I[x_1, \ldots, x_r] = 0\,(|x_1|^{\beta_1} \ldots |x_r|^{\beta_r}) \min\{|x_1|, \ldots, |x_r|\} \to \infty$$

जहाँ

$$\beta_i = \max Re\left(\frac{a_j^{(i)}}{\alpha_j^{(i)}}\right), (j=1, \ldots, n^{(i)}; i=1, \ldots, r; n_2=n_3=\ldots=n_r=0), \tag{1.7}$$

2. श्रेणी

हम समीकरण (1.1) द्वारा परिभाषित बहुचरीय I-फलन के लिये जो सान्त श्रेणियों की स्थापना करेंगे। ये हैं

प्रथम श्रेणी

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{2a_{r1}-2-t}}{t\,!} w^t I^{o,n_2:\ldots:o,n_r:(m',n');\ldots;(m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2:\ldots:p_r,q_r:[p',q'];\ldots:[p^{(r)},q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} (a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}:\ldots:(a_{(r-1)j};\alpha'_{(r-1)j},\ldots \\ (b_{2j};\beta'_{2j};\beta''_{2j})_{1,q_2}:\ldots:(b_{(r-1)j};\beta'_{(r-1)j},\ldots \end{matrix} \right.$$

$$\alpha^{(r-1)}_{(r-1)})_{1,p_{r-1}}:(a_{r1}-t;\alpha'_{r1},\ldots,\alpha^{(r)}_{r1}),(a_{rj};\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj})_{2,p_r}$$

$$\beta^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,q_{r-1}}:(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r}:(b'_j,\beta'_j)_{1,q'};\ldots;$$

$$\left. \begin{matrix} (a'_j,\alpha'_j)_{1,p'};\ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ (b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{matrix} \right| Z_1 x^{-2\alpha'_{rl}},\ldots,Z_r x^{-2\alpha^{(r)}_{rl}} \Bigg]$$

$$=(x^2-wx)^{a_{r1}-1} I^{o,n_2:\ldots:o,n_r:(m',n');\ldots;(m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2:\ldots p_r,q_r:[p',q']:\ldots;[p^{(r)},q^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{matrix} (a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}:\ldots:(a_{rj};\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}: \\ (b_{2j};\beta'_{2j})_{1,q_2}:\ldots:(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r}: \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (a'_j,\alpha'_j)_{1,p'};\ldots:(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ (b'_j,\beta''_{2j},\beta'_j)_{1,q'};\ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{matrix} \right| Z_1(x^2-wx)^{-\alpha'_{rl}},\ldots$$

$$Z_r(x^2-wx)^{-\alpha^{(r)}_{rl}} \Bigg], \qquad (2.1)$$

बशर्ते कि $|w/x|<1$, $|\arg z_j|<1/2U_j\,\pi$, $U_j>0, j=1, \ldots, r$; जहाँ U_j को समीकरण (1.5) द्वारा दिया जाता है तथा $(a_{rj}: \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj})_{2,p_r}$ सूचित करता है प्राचलों $(a_{2r}; \alpha'_{r2}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r2})$, ..., $(a_{rp_r}; \alpha'_{rp_r}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rp_r})$ के समूह को।

द्वितीय श्रेणी

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(k)_t}{t!} I^{o,n:\ldots:o,n_r:(m'+1,n'+1);(m'',n'');\ldots;}_{p_2,q_2:\ldots:p_r,q_r:[p'+2,q'+2]:[p'',q''];\ldots:}$$

$$(m^{(r)},n^{(r)}) \left[\begin{array}{l} (a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}:\ldots:(a_{rj};\alpha'_{rj}\,\alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}: \\ \end{array} \right.$$

$$[p^{(r)},q^{(r)}] \quad (b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2}:\ldots:(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_2}:$$

$$(a-k-t,w),(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'}\,(a+t,w);(a''_j,\alpha''_{rj})_{1,p''};$$

$$(b+k+t,w),(b'_j,\beta'_j)_{1,q'},(b-t,w);(b''_j,\beta''_j)_{1,q''};$$

$$\left. \begin{array}{l} \ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ \ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{array} \right| x_1,\ldots,x_r \right]$$

$$=\frac{\Gamma(1/2k+1)\,\Gamma(a-b-3/2k)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(a-b-k)} I^{o,n_2:\ldots:o,n_r:(m'+1,n'+1):}_{p_2,q_2:\ldots:p_r,q_r:[p'+2,q'+2]:}$$

$$\begin{array}{l}(m'',n'');\ldots;(m^{(r)},n^{(r)}) \\ {[p'',q''];\ldots;[p^{(r)},q^{(r)}]}\end{array} \left[\begin{array}{l} (a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}: \\ (b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2}: \end{array} \right.$$

$$\ldots:(a_{rj};\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}:(a-k,w),(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'},$$

$$\ldots:(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r}:(b+k,w),(b'_j,\beta'_j)_{1,q'},$$

$$\left. \begin{array}{l} (a-\tfrac{1}{2}k,w);(a''_j,\alpha''_j)_{1,p''};\ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ (b+\tfrac{1}{2}k;w);(b''_j,\beta''_j)_{1,q''};\ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{array} \right| x_1,\ldots,x_r \right] \tag{2.2}$$

बशर्ते कि $Re\,(2a-2b-3k)>0$, $|\arg x_j|<\frac{1}{2}U_j\,\pi$, $U_j>0$, $j=1, \ldots, r$, U_j का द्योतन समीकरण (1.5) द्वारा किया जाता है, $w>0$ तथा k एक सम्मिश्र संख्या है।

उपपत्ति

(2.1) को सिद्ध करने के लिये हम बहुचरीय I-फलन को इसके कंटूर रूप में लिखते हैं। समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलते हैं, सूत्र $_1F_0\,(a; -; x)=(1-x)^{-a}$ का प्रयोग करते हैं तथा अन्त में समीकरण (1.1) द्वारा दिये गये बहुचरीय I-फलन के प्रकाश में परिणाम की विवेचना करते हैं।

परिणाम (2.2) को सिद्ध करने के लिये (2.1) की उपपत्ति ही विधि का पालन करते हैं और निम्नलिखित सूत्र[9] का उपयोग करते हैं

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, b, c; \\ a-b+1, a-c+1 \end{matrix} : 1\right] $$

$$ =\frac{\Gamma(\frac{1}{2}a+1)\,\Gamma(a-b+1)\,\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}a-b-c+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}a-b+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}a-c+1)\,\Gamma(a-b-c+1)}\quad Re\,(a-2b-2c)>-2, $$

तथा

$$ {}_5F_4\left[\begin{matrix} a, \frac{1}{2}a+1, b, c, d \\ \frac{1}{2}a, a-b+1, a-c+1, a-d+1 \end{matrix} ; 1\right] $$

$$ =\frac{\Gamma(a-b+1)\,\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(a-d+1)\,\Gamma(a-b-c-d+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a-b-c+1)\,\Gamma(a-c-d+1)\,\Gamma(a-d-b+1)}, $$

$$ Re\,(a-b-c-d)>-1. $$

विशिष्ट दशायें

(1) (2.1) तथा (2.2) में $r=2$, $p_3=p_4=\ldots=p_r=q_3=q_4=\ldots=q_r=0=n_2=\ldots=n_r$, रखने पर हमें चौरसिया द्वारा प्रदत्त परिणाम[3] प्राप्त होता है।

(2) चौरसिया विशिष्ट दशा में[3]

$$ \alpha'_{2j}=\alpha''_{2j}\ (j=2, \ldots, p_2),\ \beta'_{2j}=\beta''_{2j}\ (j=1, \ldots, q_r),\ \alpha'_{21}\to 0, $$

रखने पर तथा थोड़े से सरलीकरण पर यह होरा के परिणाम में[6] समानीत हो जाता है।

3. फूरियर ज्या श्रेणी

हमने समीकरण (1.1) द्वारा परिभाषित बहुचरीय I-फलन के लिये दो फूरियर ज्या श्रेणियों की स्थापना की है। ये हैं

प्रथम श्रेणी

$$(\sin x)^{4u-1} (\cos x)^{4v-1} I^{o,n_2 : \ldots : o,n_r : (m',n'); \ldots;}_{p_2,q_2 ; \ldots : p_r,q_r : [p',q']; \ldots;}$$

$$\begin{matrix}(m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p^{(r)},q^{(r)}]\end{matrix} \left(x_1 (\sin xe^{ix})^{h_1}, \ldots, x_r (\sin xe^{ix})^{h_r} \right)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{4}{\pi i} e^{2u\pi i} \Gamma(4N) I^{o,n_2 : \ldots : o,n_{(r-1)}; o,n_r+1 :}_{p_2,q_2 : \ldots : p_{(r-1)},q_{(r-1)} : p_r+1,q_r+1 :}$$

$$\begin{matrix}(m',n'); \ldots; (m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p',q']; \ldots; [p^{(r)},q^{(r)}]\end{matrix} \left[\begin{matrix} (a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : \ldots : \\ (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1,q_2} : \ldots : \end{matrix} \right.$$

$$(a_{(r-1)j}; \alpha'_{(r-1)j}, \ldots, \alpha^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,p_{(r-1)}} : (1-4u; h_1, \ldots, h_r),$$

$$(b_{(r-1)j}; \beta'_{(r-1)j}, \ldots, \beta^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,q_{r-1}} : (b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}),$$

$$(a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r} : (a'_j, \alpha'_j)_{1,p'} : \ldots (a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}$$

$$(1-4u-4N; h_1, \ldots, h_r) : (b'_j, \beta'_j)_{1,q'} : \ldots : b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}$$

$$\left| \, x_1 e^{ih_1 \pi/2}, \ldots, x_r e^{ih_r \pi/2} \right] \sin (4n+4N)x, \qquad (3.1)$$

बशर्ते कि $0<x<\pi/2$, $h_1,h_2, \ldots, h_r>0$, $|\arg x_j|<1/2U_j \pi$, $U_j>0, j=1, \ldots, r$, जहाँ U_j तथा α_j पूर्ववत् हैं ।

द्वितीय श्रेणी

$$(\sin x)^{4u-1} (\cos x)^{4v-1} I^{o,n_2 : \ldots : o,n_r : (m',n'); \ldots;}_{p_2,q_2 : \ldots : p_r,q_r : [p',q']; \ldots ;}$$

$$\begin{matrix}(m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p^{(r)},q^{(r)}]\end{matrix} \left(x_1 (\tan x)^{h_1}, \ldots, x_r (\tan x)^{h_r} \right)$$

$$= \frac{4e^{2i\pi}}{\pi i} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(4u+4N)} I^{o,n_2 : \ldots : o, n_{r-1}; o,n_r+1 :}_{p_2,q_2 : \ldots : p_{(r-1)}q_{(r-1)} : p_r+1,q_r+1 :}$$

$$(m',n'); \ldots; (m^{(r)},n^{(r)} \left\{ \begin{array}{l} (a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : \ldots : \\ (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1,q_2} : \ldots : \end{array} \right.$$
$$[p',q']; \ldots; [p^{(r)},q^{(r)}]$$

$$(a_{(r-1)j}; \alpha'_{(r-1)j}, \ldots, \alpha^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,p_{r-1}} : (1-4u; h_1, \ldots, |h_r),$$

$$(b_{(r-1)j}; \beta'_{(r-1)j}, \ldots, \beta^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,q_{r-1}} : (b_{rj}\beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r}$$

$$(a_{rj}; a'_{rj}, \ldots, a^{(r)}_{rj})_{1,p_r} : (a'_j, \alpha'_j)_{1,p'}; \ldots; (a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}$$

$$(4N; h_1, \ldots_r h_r) : (b'_j, \beta'_j)_{1,q'}; \ldots; (b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}$$

$$\left| x_1 e^{ih_1 \pi/2}, \ldots, x_r e^{ih_r \pi/2} \right] \sin (4u+4N)\, x \tag{3.2}$$

बशर्ते कि $0<x<\pi/2, h_1, \ldots, h_r>0$, $|\arg x_j|<1/2U_j \pi$, $U_j>0$ $j=1, \ldots, r$ जहाँ U_j को समीकरण (1.5) द्वारा दिया जाता है।

उपपत्ति

(3.1) को सिद्ध करने के लिये हम कल्पना करेंगे कि

$$f(x)=(\sin x)^{4u-1} (\cos x)^{4v-1} I[x_1(\sin xe^{ix})^{h_1}, \ldots, x_r(\sin xe^{ix})^{h_r}]$$
$$= \sum_{N=0}^{\infty} C_N \sin (4u+4N)\, x, \tag{3.3}$$

जहाँ $0<x<\pi/2$.

उपर्युक्त समीकरण वैध है क्योंकि यह विवृत अन्तराल $(0, \pi/2)$ में संतत है और बद्ध विचरण वाला है। उपर्युक्त समीकरण में दोनों पक्षों में $e^{i(4u+4v)x}$ से गुणा करने, x के प्रति समाकलित करने तथा निम्नलिखित समाकल[10] का उपयोग करने पर

$$\int_0^{\pi/2} e^{4\, mix} \sin (4nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{यदि } m\neq n \\ & m=n=0 \\ \pi i/4 & \text{यदि } m=n\neq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

हमें

$$C_N = \frac{4}{\pi i} e^{2u\pi i} \Gamma(4N) I^{o,n_2 : \ldots : o,n_{r-1} : o,n_r+1 :}_{p_2,q_2 : \ldots : p_{r-1},q_{r-1} : p_r+1,q_r-1 :}$$

$$\begin{matrix} (m',n'); (m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p',q']; \ldots; [p^{(r)}q^{(r)} \end{matrix} \left[\begin{matrix} (a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : \ldots : \\ (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1,q_2} : \ldots : \end{matrix} \right.$$

$$(a_{(r-1)j}; \alpha'_{(r-1)j}, \ldots, \alpha^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,p_{r-1}} : (1-4u; h', \ldots, h_r),$$

$$(b_{(r-1)j}; \beta'_{(r-1)j}, \ldots, \beta^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,q_{r-1}} : (b_{rj}: \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r},$$

$$(a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r} : (a'_j, \alpha'_j)_{1,p'}; \ldots; (a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}$$

$$(1-4u-4N; h_1, \ldots, h_r) : (b'_j, \beta'_j)_{1,q'}; \ldots; (b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}$$

$$\left| x_1 e^{ih_1 \pi/2}, \ldots, x_r e^{ih_r \pi/2} \right] \quad (3.5)$$

प्राप्त होता है। (3.3) में समीकरण (3.5) से C_N का मान रखने पर हमें (3.1) द्वारा दी गई श्रेणी प्राप्त होती है।

(3.2) की उपपत्ति (3.1) की उपपत्ति जैसी है।

विशिष्ट दशा

(3.1) तथा (3.2) में $p_3 = p_4 = \ldots = p_r = 0 = q_3 = q_4 = \ldots = q_r = n_3 = \ldots = n_r$ एवं $r=2$ रखने पर हमें महाजन तथा सक्सेना के परिणाम प्राप्त होते हैं।[4]

निर्देश

1. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1986, **29** (4), 231-235.
2. प्रसाद, वाई० एन० तथा यादव, जी० एस०, Proc. Math. Soc. B. H. U., 1986, **2** 13-22.
3. चौरसिया, बी० बी० एल०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1977, **20** (2), 91-95.

4. महाजन, आर० ओर० तथा सक्सेना, आर० के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1977, **20** (3), 243-252.

5. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Comp. Math. 1962, **15**, **2**39-341.

6. होरा, एन० एस०, **विज्ञान परिषद अनु०** पत्रिका, 1974, 17, (3), 177-183.

7. एर्डेयी; ए० Table of Integral Transforms, भाग II, Mc Graw Hill, New York, 1954, 284 (3).

8. शर्मा, सी० के०, **विज्ञान परिषद** अनु० पत्रिका, 1977, **20** (3), 253-262.

9. एर्डेल्यी, ए०, Table of Integral Transforms, भाग I, Bateman manuscript project, Mc Graw Hill Co., 1954.

10. लिरिज्क, आई० एम० तथा ग्रैडस्टेज्न, आई० एस०, Table of Series, Products and Integrals, Moscow.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc.

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 20 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य ; 5 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 20 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 5 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद